Tutorial de Análisis Numérico
Interpolación : Fórmula de Newton en diferencias divididas

Jesús García Quesada
Departamento de Informática y Sistemas
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria
35017 Campus de Tafira, España
Email : jgarcia@dis.ulpgc.es

2 de Octubre de 2000, v0.3

Índice General

1. FÓRMULA DE NEWTON EN DIFERENCIAS DIVIDIDAS

Sea $p_k(x)$ el polinomio de interpolación en los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_k$ (grado máximo $= k$). Considerando $p_k(x), p_{k-1}(x)$ y su diferencia :

$$q_k(x) = p_k(x) - p_{k-1}(x)$$

vemos que para los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ tenemos que :

$$p_{k-1}(x_i) = y_i = p_k(x_i), \quad 0 \leqslant i \leqslant k-1$$

y también que para el siguiente punto x_k tenemos que $p_k(x_k) = y_k$, sin conocerse el valor a priori que pueda tener $p_{k-1}(x_k)$.

Por tanto, el polinomio $q_k(x)$ verifica :

$$q_k(x_i) = p_k(x_i) - p_{k-1}(x_i) = y_i - y_i = 0, \quad 0 \leqslant i \leqslant k-1$$

Ahora bien, $q_k(x)$ es un polinomio de grado máximo k ya que es la resta de dos polinomios, $p_k(x)$ de grado k y $p_{k-1}(x)$ de grado $k-1$ y según se acaba de ver se anula en los k puntos anteriores tiene con lo cual se puede expresar de la siguiente forma :

$$q_k(x) = a_k(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1}) = a_k \prod_{i=0}^{k-1}(x - x_i)$$

Por otra parte, en el punto x_k se cumple :

$$q_k(x_k) = p_k(x_k) - p_{k-1}(x_k) = a_k(x_k - x_0)(x_k - x_1)\cdots(x_k - x_{k-1})$$

y despejando entonces a_k de ésta última identidad tenemos :

$$a_k = \frac{y_k - p_{k-1}(x_k)}{(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1})}$$

con lo cual podemos poner :

$$p_k(x) = p_{k-1}(x) + q_k(x)$$

donde lo que parece complicado es calcular el a_k, que sería el coeficiente de x^k en el polinomio $p_k(x)$ pero para esto se puede utilizar las diferencias divididas:

Definición 1. *Dada la función f de la cual se conoce su valor en los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_k$, se llama* **diferencia dividida de f en los puntos** $x_0, x_1, \ldots, x_k$ *al valor* $a_k = \mathbf{f[x_0, x_1, \cdots, x_k]}$ *y se calcula recursivamente como sigue :*

$$\boxed{\begin{aligned} f[x_i] &= f(x_i) = y_i \\ f[x_i, x_{i+1}] &= \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i} \\ f[x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k}] &= \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \cdots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i} \end{aligned}}$$

Lema 1.1.

$$f[x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \cdots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

Demostración. Sea $p_j(x)$ el polinomio de grado $\leqslant j$ que coincide con $f(x)$ en los puntos $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+j}$ y sea $q_{k-1}(x)$ el polinomio de grado $\leqslant k-1$ que coincide con $f(x)$ en los puntos $x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+k}$. Entonces :

$$p(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+k} - x_i}\, q_{k-1}(x) + \frac{x_{i+k} - x}{x_{i+k} - x_i}\, p_{k-1}(x)$$

es un polinomio de grado $\leqslant k$ que verifica :

$$p(x_j) = f(x_j), \quad \text{para } j = i, i+1, \ldots, i+k$$

ya que :

$$\underline{\text{Para } i} : p(x_i) = \frac{x_{i+k} - x_i}{x_{i+k} - x_i}\, p_{k-1}(x_i) = y_i = f(x_i)$$

$$\underline{\text{Para } i+k} : p(x_{i+k}) = \frac{x_{i+k} - x_i}{x_{i+k} - x_i}\, q_{k-1}(x_{i+k}) = y_{i+k} = f(x_{i+k})$$

$$\underline{\text{ y para cada } j = i+1, \ldots, i+k-1} :$$

$$p(x_j) = \frac{x_j - x_i}{x_{i+k} - x_i}\, q_{k-1}(x_j) + \frac{x_{i+k} - x_j}{x_{i+k} - x_i}\, p_{k-1}(x_j) =$$

$$\left[\frac{x_j - x_i}{x_{i+k} - x_i} + \frac{x_{i+k} - x_j}{x_{i+k} - x_i}\right] y_j = \frac{x_{i+k} - x_i}{x_{i+k} - x_i}\, y_j = y_j$$

Por tanto, por la unicidad del polinomio de interpolación, tendremos que $p(x) = p_k(x)$ y entonces

$$f[x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k}] = \text{coeficiente término principal de } p_k(x) =$$
$$= \frac{\text{coeficiente término principal de } q_{k-1}(x)}{x_{i+k} - x_i} - \frac{\text{coeficiente término principal de } p_{k-1}(x)}{x_{i+k} - x_i} =$$
$$= \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \cdots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

$\square$

¿Cómo organizar el cálculo de la tabla de diferencias divididas?

Ejemplo. El cálculo de las diferencias divididas para cuatro puntos se ordenaría como sigue :

Solución:

$$\begin{array}{lllll}
x_0 \longrightarrow & y_0 = \mathbf{f[x_0]} \searrow & & & \\
 & & \mathbf{f[x_0, x_1]} \searrow & & \\
x_1 \longrightarrow & y_1 = f[x_1] \nearrow & & \mathbf{f[x_0, x_1, x_2]} \searrow & \\
 & & f[x_1, x_2] \nearrow & & \mathbf{f[x_0, x_1, x_2, x_3]} \\
x_2 \longrightarrow & y_2 = f[x_2] & & f[x_1, x_2, x_3] \nearrow & \\
 & & f[x_2, x_3] & & \\
x_3 \longrightarrow & y_3 = f[x_3] & & &
\end{array}$$

$\blacksquare$

Podemos abordar entonces el cálculo del polinomio de interpolación en los puntos (x_0, y_0), (x_1, y_1),(x_2, y_2),$\ldots$, (x_n, y_n) de la siguiente forma :

$$
\begin{aligned}
p_0(x) &= a_0 = f[x_0] = f(x_0) = y_0 \\
p_1(x) &= p_0(x) + a_1(x - x_0) = f[x_0] + a_1(x - x_0) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) \\
p_2(x) &= p_1(x) + a_2(x - x_0)(x - x_1) = f[x_0] + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) = \\
&= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\
&\quad \vdots \\
p_n(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}) = \\
p_n(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots \\
&\qquad + f[x_0, x_1, \cdots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})
\end{aligned}
$$

o también de forma más concisa :

$$
\boxed{p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f[x_0, x_1, \ldots, x_i] \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)}
$$

que se denomina **fórmula de interpolación de Newton en diferencias divididas**.

Para la evaluación del polinomio de interpolación en su forma de Newton en diferencias divididas $p_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$ usaremos el anidamiento del esquema de Ruffini–Horner :

$$
p_n(z) = (\cdots(a_n(z - x_{n-1}) + a_{n-1})(z - x_{n-2}) + \cdots + a_1)(z - x_0) + a_0
$$

para la evaluación en un punto z, y donde se ha puesto $a_k = f[x_0, \ldots, x_k]$. Obsérvese que se necesitan n productos y 2n? sumas/restas.

Ejemplo. Obtener una fórmula para la suma de los cuadrados de los primeros números naturales.

Solución: Sabemos que $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ y como queremos obtenerla por interpolación construimos un conjunto de valores según los diferentes valores de n. Como el polinomio ha de ser el mismo para cualquier posible ordenación de los puntos, elegimos el siguiente orden:

n	**y**	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, \ldots, x_{i+3}]$	$f[x_i, \ldots, x_{i+4}]$
$3 \longrightarrow$	**14**				
		9			
$2 \longrightarrow$	5		**23/6**		
		50/3		**1/3**	
$5 \longrightarrow$	55		19/6		**0**
		54/4		1/3	
$1 \longrightarrow$	1		23/6		
		29/3			
$4 \longrightarrow$	30				

El polinomio es por tanto:

$$\begin{aligned} p(x) =& 14 + 9(x-3) + \frac{23}{6}(x-3)(x-2) + \frac{1}{3}(x-3)(x-2)(x-5) = \\ =& \frac{2x^3+3x^2+6x}{6} = \frac{x(x+1)(2x+1)}{6} \end{aligned} \tag{1}$$

como cabría esperar. ■

Ejemplo. Obtener por interpolación el valor para $x = 3$ conocidos los valores $x_0 = 0, y_0 = -1$; $x_1 = 1, y_1 = 0$; $x_2 = 2, y_2 = 7$; $x_3 = 4, y_3 = 63$.

Solución:

Por la fórmula de Newton tenemos, sustituyendo ya el valor $x = 3$:

x	**y**	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, \ldots, x_{i+3}]$
0	$-\mathbf{1}$			
		1		
1	0		**3**	
		7		**1**
2	7		7	
		28		
4	63			

El valor del polinomio es por tanto:

$$p(3) = -1 + 1.(3) + 3.3.(2) + 1.(3).(2).(1) = 26 \tag{2}$$

que es lo mismo que se obtuvo con Lagrange, lógicamente. ■

ULPGC

Informática

Página Web

Página de Inicio

Contenido

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Página 9 de 19

Volver

Pantalla completa

Cerrar

Salir

2. PROBLEMAS

Problema 1. Los siguientes datos están tomados de un polinomio de grado $\leqslant 5$. ¿Cúal es el grado del polinomio?

$\mathbf{x_i}$	-2	-1	0	1	2	3
$\mathbf{y_i}$	-5	1	1	1	7	25

Problema 2. Determinar el número de sumas/restas y el número de productos/divisiones que se necesitan para:

1. calcular las diferencias divididas para $n+1$ nodos.
2. calcular (eficientemente) el polinomio de Newton, una vez se conocen las diferencias divididas.

Problema 3. Construir la tabla de diferencias divididas para los puntos

x	-0.2	0.5	0.1	0.7	0.0
$\mathbf{f(x)}$	1.3940	1.0025	1.1221	1.0084	1.1884

y usarla para estimar $f(0.15)$ usando:

(a) el polinomio de grado dos obtenido con los tres primeros puntos

(b) el polinomio de grado dos obtenido con los tres últimos puntos

(c) el polinomio de grado tres obtenido con los cuatro primeros puntos

(d) el polinomio de grado tres obtenido con los cuatro últimos puntos

(e) el polinomio de grado cuatro

Referencias

[Act90] F.S. Acton. *Numerical Methods That (Usually) Work*. The Mathematical Association of America, Washington, 1990.

[Atk89] K. E. Atkinson. *An Introduction to Numerical Analysis*. John Wiley, New York, 2nd. edition, 1989.

[BF80] R.L. Burden and D. Faires. *Análisis Numérico*. Grupo Editorial Iberoamericana, México, 1980.

[CC89] S.C. Chapra and R.P. Canale. *Numerical Methods for Engineers*. McGraw-Hill International, New York, second edition, 1989.

[CdB80] S. D. Conte and C. de Boor. *Elementary Numerical Analysis: An Algorithmic Approach*. McGraw–Hill, New York, third edition, 1980.

[DB74] Germund Dahlquist and Åke Björck. *Numerical Methods*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1974.

[Fad59] V.N. Faddeeva. *Computational Methods of Linear Algebra*. Dover Publications, Inc, New York, 1959.

[Frö79] C.-E. Fröberg. *Introduction to Numerical Analysis*. Adison–Wesley, Reading, Massachusetts, 2nd. edition, 1979.

[GW89] C.F. Gerald and P.O. Wheatley. *Applied Numerical Analysis*. Addison–Wesley Publishing Co., Reading, Massachusets, fourth edition, 1989.

[Hen72] P. Henrici. *Elementos de Análisis Numérico*. Ed. Trillas, México, 1972.

[Hil74] F. B. Hildebrand. *Introduction to Numerical Analysis*. McGraw–Hill, New York, second edition, 1974.

[KC94] D. Kincaid and W. Cheney. *Análisis Numérico : las matemáticas del cálculo científico*. Addison-Wesley Iberoamericana, 1994.

[Mar87] M. J. Maron. *Numerical Analysis: A Practical Approach*. Macmillan Publishing Co., New York, second edition, 1987.

[ML91] M. J. Maron and R. J. Lopez. *Numerical Analysis: A Practical Approach*. Wadsworth, Belmont, California, third edition, 1991.

[RR78] Anthony Ralston and Philip Rabinowitz. *A First Course in Numerical Analysis*. McGraw-Hill, New York, 2nd. edition, 1978.

[Sch89] H.R. Schwarz. *Numerical Analysis*. John Wiley & Sons, Chichester, 1989.

[Wer84] W. Werner. *Mathematics of Computation*, 43:205–217, 1984.

[YG73a] David M. Young and R.T. Gregory. *A Survey of Numerical Mathematics*, volume I. Dover Publications, New York, 1973.

[YG73b] David M. Young and R.T. Gregory. *A Survey of Numerical Mathematics*, volume II. Dover Publications, New York, 1973.

Soluciones a los Problemas

Problema 1.

La tabla de diferencias divididas es:

x	**y**	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, \ldots, x_{i+3}]$	$f[x_i, \ldots, x_{i+4}]$
-2	$\mathbf{-5}$				
		6			
-1	1		**3**		
		0		**1**	
0	1		0		**0**
		0		1	
1	1		3		0
		6		1	
2	7		6		
		18			
3	25				

y por tanto el polinomio tiene grado tres, siendo éste:

$$\begin{aligned} p(x) = & -5 + 6(x+2) + 3(x+2)(x+1) + 1(x+2)(x+1)x = \\ = & \, x^3 - x + 1 \end{aligned}$$

como se puede constatar a partir de los nodos dados.

Problema 2. Probar que es una fórmula de $O(n^2)$:

El número de sumas/restas necesarias para calcular las diferencias divididas es $n(n+1)$ y el de divisiones es la mitad $n(n+1)/2$.

Para evaluar eficientemente el polinomio en su forma de Newton:

$$p_n(x) = f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + \cdots + f[x_0,x_1,\ldots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

son necesarias $2n$ sumas/restas y n productos, ya que se considera el anidamiento del esquema de Ruffini–Horner :

$$p_n(z) = (\cdots(a_n(z-x_{n-1})+a_{n-1})(z-x_{n-2})+\cdots+a_1)(z-x_0)+a_0$$

para la evaluación en un punto z, y donde es $a_k = f[x_0,\ldots,x_k]$.

Problema 3(a) 1.0919

Problema 3(b) 1.0973

ULPGC

Informática

Página Web

Página de Inicio

Contenido

Página 16 de 19

Volver

Pantalla completa

Cerrar

Salir

Problema 3(c) 1.0941

$\square$

Problema 3(d) 1.0951

□

Problema 3(e) 1.0920. El valor real es $f(0.15) = 1.0956$, ya que los valores corresponden a la función:

$$f(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x+1)}$$

$\square$