Análisis Numérico -ITIS

Descripción de la práctica 4: Extrapolación de Richardson

Se ha visto en clase que:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \quad \overbrace{-\sum_{i=1}^{\infty} a_i h^{2i}}^{\text{Error de truncamiento } h^{2i}} \quad \text{(fórmula central)} \tag{1}$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \overbrace{-\sum_{i=1}^{\infty} b_i h^{i}}^{\text{Error de truncamiento } h^{i}} \quad \text{(fórmula progresiva)} \tag{2}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left(f_0 + 2f_1 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n\right) + \sum_{i=1}^{\infty} c_i h^{2i} \text{ (trapezoidal)} \tag{3}$$

y dada la forma especial que adoptan los errores de truncamiento de las fórmulas que aproximan la derivada o la integral, esto nos permite construir una tabla cuya primera columna T_0^i se obtiene utilizando la fórmula (1), (2) ó (3) para diferentes h, y el resto de las columnas se pueden generar con la recurrencia:

$$T_k^i = \frac{(h_i/h_{i+k})^\beta \, T_{k-1}^{i+1} - T_{k-1}^i}{(h_i/h_{i+k})^\beta - 1} \quad \text{para} \begin{cases} k = 1, 2, \cdots \text{(columna)} \\ i = 1, 2, \cdots \text{(fila)} \end{cases}$$

siendo $\beta = 2, 1, 2$ respectivamente. Si es $h_{i+1} = h_i/2, \ \forall i$ resulta la conocida fórmula:

$$T_k^i = \frac{(2^k)^\beta \, T_{k-1}^{i+1} - T_{k-1}^i}{(2^k)^\beta - 1}$$

con los valores anteriores de β.
Se ha de escribir un procedimiento MATLAB con forma parecida a:

```
function [T,val]=extrap_richardson(f,formula,h,maxiter,tol,x/[a,b])
```

que devuelve la tabla T construida y el valor *val* de la derivada en el punto pedido o la integral en el intervalo seleccionado. Los parámetros de entrada son:

`f` la función (a definir con una `inline`)

`formula` número de fórmula a utilizar (1,2,3)

`h` será el valor del paso h inicial para arrancar los cálculos o bien un vector que contiene los h para los cuales hay que calcular la fórmula

`maxiter` que indicará el número máximo de columna k a construir (del T_k^i)

`tol` es la precisión pedida

`x` **ó** `[a,b]` punto x donde se quiere calcular la derivada o los extremos del intervalo de integración, cuando sea el caso.

Si se alcanza la convergencia con la tolerancia prevista ($|T_{k+1} - T_k|/|T_{k+1}| <$`tol`, o bien se llega al valor máximo `maxiter` sin que se haya producido la convergencia, se produce la salida. En este caso hay que proporcionar la mejor estimación obtenida hasta el momento y un mensaje indicando lo ocurrido.
Habría que chequear algunas incoherencias que se podrían dar al invocar el procedimiento. Por ejemplo, se dice que se va a utilizar la fórmula 2, y al final de la lista de parámetros reales aparece un intervalo de integración en lugar de un punto, etc. En estos casos se aborta la ejecución dando el mensaje correspondiente (usar `error`).
En los apuntes de teoría hay ejemplos numéricos de todas las situaciones que se pueden presentar.