1. Resolver los siguientes apartados :

   (a) Obtener por interpolación la fórmula para la suma de los cubos de los n primeros números naturales:

   $$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$$

   (Nota : es el cuadrado de la fórmula de $\sum_{k=1}^{n} k$).

   (b) Suponiendo que los siguientes valores y_k pertenecen a un polinomio de cuarto grado predecir los tres valores siguientes:

$\mathbf{x_k}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathbf{y_k}$	1	0	1	0	1	16			

2. Dada la siguiente nube de puntos :

$\mathbf{x_i}$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.7	0.9
$\mathbf{y_i}$	4.3843	5.7349	7.0481	8.3209	11.8714	13.9981

   encontrar la función del tipo $y = Ax + Bsenx + C\cos x$ que mejor se ajuste por mínimos cuadrados.

3. La radiación emitida por un elemento radiactivo sigue la expresión $R = R_0 e^{-\lambda t}$. Para un determinado elemento se han observado las siguientes emisiones :

t	10	20	30	40	50	60
R	20.511	16.174	13.904	12.514	10.775	9.569

   Con los datos de la tabla calcular los parámetros R_0 y λ para el elemento analizado.

4. Supongamos que se tiene la función $f(x) = \ln(\text{sen}(x))$ tabulada de tal forma que los puntos x_i están equiespaciados una distancia h dentro del intervalo $[1, 2]$. Se pide :

   (a) Encontrar una cota superior (en función de h) para el error que se cometería por interpolación lineal en dicho intervalo.

   (b) Encontrar un h tal que el error cometido por una interpolación lineal con las condiciones del enunciado sea de al menos ± 0.005.

5. Calcular la cota máxima de error en el intervalo $[0, \frac{1}{2}]$ del polinomio que interpola la función $y = \text{sen}\,\pi x$ definida en los tres puntos siguientes: $x_0 = 0$; $x_1 = \frac{1}{6}$; $x_2 = \frac{1}{2}$

6. Resolver por el método de coeficientes indeterminados el siguiente problema de interpolación. Sean $x_0 = 0, x_1 = \pi/6, x_2 = \pi/4, x_3 = \pi/3$, con $y_0 = 0, y_1 = 2 - \sqrt{3}/2, y_2 = 1 + \sqrt{2}/2, y_3 = 3/2$. Encontrar un polinomio trigonométrico $p(x)$ de la forma $p(x) = c_0 + c_1 \cos x + c_2 \cos 2x + c_3 \cos 3x$ tal que $p(x_j) = y_j$, $0 \leq j \leq 3$. (Sol. : 1,-1,2,-2)

7. Algoritmo de Newton de diferencias divididas. Coste y evaluación.

8. Algoritmo de Newton de diferencias finitas progresivas. Coste y evaluación.

9. Obtener la fórmula de interpolación de Newton de diferencias regresivas considerando los puntos de interpolación equidistantes en el orden $x_n, x_{n-1}, \cdots, x_1, x_0$. Algoritmo, coste y evaluación.

10. Obtener por Aitken-Lagrange y Neville el polinomio $p(x)$ que interpola en los tres puntos siguientes : $p(0) = -1,\ p(1) = 2,\ p(2) = 7$.

11. Construir los algoritmos de Aitken-Lagrange y Neville, utilizando en cada caso un array unidimensional para la construcción recurrente de los polinomios de interpolación de grado superior.

12. Probar la fórmula de recurrencia de diferencias divididas utilizando el lema de Aitken

$$\forall k \geq 1 : f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = \frac{f[x_1, x_2, \cdots, x_k] - f[x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}]}{x_k - x_0} \quad y \quad f[x_i] = f(x_i), i = 0, 1, \cdots, k.$$

13. (a) Determinar el spline cúbico natural $S(x)$ que interpola los valores de y_i en los puntos $a_i, i = 1, \cdots, 5$, donde :

$\mathbf{a_i}$	0.25	0.30	0.39	0.45	0.53
$\mathbf{y_i}$	.5000	.5477	.6245	.6708	.7280

(b) Determinar el spline cúbico natural $S(x)$ que interpola en los valores del apartado anterior y que satisface las condiciones :

$$S'(.25) = 1.0000 \qquad S'(.53) = .6868$$

(c) Determinar el spline cúbico natural $S(x)$ con nodos a_2, a_3, a_4 que interpola en los valores y_2, y_3, y_4 y que también satisface las condiciones $S(.25) = .5000$, $S(.53) = .7280$.

(d) Los valores de y_i dados en la tabla corresponden a $a_i^{1/2}, i = 1, \cdots, 5$. Evaluar la integral $\int_{.25}^{.53} S(x)dx$ para los tres splines calculados en los apartados anteriores y comparar los resultados con el valor verdadero de $\int_{.25}^{.53} x^{1/2}dx = .1739$. Análogamente, evaluar $S(.35)$ y $S'(.35)$ y comparar los resultados con $\sqrt{.35} = .5916$ y $1/2\sqrt{.35} = .8452$.

14. Ejemplo de Runge (1901). Considerar la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ en el intervalo $[-5, 5]$. Para $n = 1, 2, 3, 4, \cdots$ determinar un polinomio $p_{2n}(x)$ de grado $2n$ tal que :

$$p_{2n}\left(\frac{5j}{n}\right) = f\left(\frac{5j}{n}\right), \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm n$$

Comprobar que cuando n aumenta, la diferencia máxima entre $p_{2n}(x)$ y $f(x)$ incrementa a pesar del hecho de que la distancia entre puntos consecutivos disminuye. Para $n \to \infty$, la diferencia máxima entre $p_{2n}(x)$ y $f(x)$ se hace infinita.

Resolver el mismo problema con splines cúbicos.

15. Tomando la función $f(x) = 1/x$ en los puntos de interpolación 0.1, 0.2, 0.5, 1.0, 2.0, 5.0, 10.0 realizar el cálculo de $f(1.5) = 0.\overline{6}$ considerando sucesivamente $1, 2, \cdots, 7$ puntos de interpolación. Hacer el mismo cálculo considerando splines cúbicos naturales.

16. La concentración de sal disminuye en un recipiente por la transferencia de masa en la superficie. La concentración C se mide como una función del tiempo τ produciendo :

$\tau(s)$	0.1	0.2	0.3	0.5	1.0	2.0	4.0	4.5	5.0
$\mathbf{C}(kg/m^3)$	83.3	81.7	80.0	76.9	69.6	57.0	38.2	34.6	31.3

Se estima que sigue una variación exponencial de la forma $C = Be^{-bt}$. Obtener el mejor ajuste a los datos, y determinar las constantes B y b.