1. Métodos de la potencia y potencia inversa para el cálculo de autovalores y autovectores. Como ejemplo aplicar dichos métodos para calcular los autovalores y autovectores de las matrices[1] :

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -1 & 1/2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1/2 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Obtener los autovalores y autovectores de A y de la matriz de Hilbert de orden cuatro[2] :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad H_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \end{bmatrix}$$

3. Calcular los autovalores y autovectores de la siguiente matriz:[3] $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

4. Para la matriz de Hessenberg: $H = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ obtener sus autovalores exactos $6, 4, 3$ y 3, obteniendo también sus autovectores[4].

5. *Técnicas de deflación.* Supongamos que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son los autovalores de A con autovectores asociados $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}$ y que λ_1 tiene multiplicidad 1.

   i) Deflación de Wielandt. Si $\mathbf{x}$ es cualquier vector con la propiedad que $\mathbf{x^T}\, \mathbf{v_1} = 1$, la matriz:

   $$B = A - \lambda_1\, \mathbf{v_1}\, \mathbf{x^T}$$

   tiene autovalores $0, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ con autovectores asociados $\mathbf{v_1}, \mathbf{w_2}, \ldots, \mathbf{w_n}$, donde $\mathbf{v_j}$ y $\mathbf{w_j}$ están relacionados por la ecuación:

   $$\mathbf{v_j} = (\lambda_j - \lambda_1)\mathbf{w_j} + \lambda_1(\mathbf{x^T}\, \mathbf{w_j})\, \mathbf{v_1}$$

   para cada $j = 2, 3, \ldots, n$. Se utiliza el vector $\mathbf{x} = \dfrac{1}{\lambda_1\,(\mathbf{v_1})_i}\,(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})^T$, donde $(\mathbf{v_1})_i$ es la componente i-ésima del vector $\mathbf{v_1} \neq \mathbf{0}$ y $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ es la fila i-ésima de A.

   ii) La deflación de Hotelling se usa en matrices simétricas y utiliza el hecho de que la matriz:

   $$B = A - \frac{\lambda_1}{\mathbf{v_1^T v_1}}\, \mathbf{v_1}\, \mathbf{v_1^T}$$

   tiene los autovalores $0, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ con autovectores asociados $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}$ (se supone que $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}\}$ es una base ortonormal ya que A es simétrica).

6. Obtener el par dominante de cada una de las matrices:[5][6]

$$\begin{bmatrix} 7 & 6 & -3 \\ -12 & -20 & 24 \\ -6 & -12 & 16 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -14 & -30 & 42 \\ 24 & 49 & -66 \\ 12 & 24 & -32 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2.5 & -2.5 & 3.0 & 0.5 \\ 0.0 & 5.0 & -2.0 & 2.0 \\ -0.5 & -0.5 & 4.0 & 2.5 \\ -2.5 & -2.5 & 5.0 & 3.5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2.5 & -2.0 & 2.5 & 0.5 \\ 0.5 & 5.0 & -2.5 & -0.5 \\ -1.5 & 1.0 & 3.5 & -2.5 \\ 2.0 & 3.0 & -5.0 & 3.0 \end{bmatrix}$$

y utilizar el método de la potencia inversa para obtener el resto de autovalores y autovectores.

---

[1] Autovalores a seis decimales: $\simeq 1, 0.224745, -2.224745$ y $9.099019, -1.099019, -0.585786, -3.414214$.

[2] Autovalores: $2+\sqrt{2}, 2-\sqrt{2}, 2$ y $0.967023e-4, 0.673827e-2, 0.169141, 1.599214$.

[3] Autovalores: $-1/2 + 1/2\sqrt{17}, -1/2 - 1/2\sqrt{17}, 3$.

[4] Autovectores: $(3,3,2,1), (-1,-1,0,1), (0,0,-1,1)$.

[5] Autoval/vectores: $4, -2, 1; (-23, 1, 0), (-1, 2, 1), (-3/2, 2, 1)$, $-2, 1, 4; (-3/2, 2, 1), (-2, 1, 0), (-1, 2, 1)$.

[6] Autoval/vectores: $5, 1, 3, 6; (-1, 1, 0, 0), (0, -1, -1, 1), (1, 1, 1, 0), (1, 0, 1, 1)$, $6, 4, 1, 3; (-1/2, 1/2, -1/2, 1), (-1, 1, 0, 1), (-1/2, 1/2, 1/2, 1), (1, 1, 1, 0)$.