Sistemas lineales

Question 1

Top 1 Bottom Focus Help

1.1

Obtener la factorización de Doolittle de la siguiente matriz, sin utilizar pivotación

$$\begin{bmatrix} 8 & 8 & -5 \\ 4 & -7 & -4 \\ 4 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} 8 & 8 & -5 \\ 1/2 & -11 & -3/2 \\ 1/2 & 4/11 & -87/22 \end{bmatrix}$$

1.2

Introducir el vector de permutaciones:
You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

1.3

Entrar el valor del determinante:
You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$348$$

1.4

Resolver el sistema lineal A **x** = **b** cuando **b** es el vector siguiente

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 15 \\ 14 \end{bmatrix}$$

You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Solution:

Factorización

En cada etapa de la resolución se muestran los valores actuales de la matriz y del vector de permutaciones de filas, en su caso. Los nuevos elementos calculados aparecen con su valor definitivo en el color que les corresponde según se trate de los elementos de una fila o de una columna.

$$\begin{bmatrix} 8 & 8 & -5 \\ 4 & -7 & -4 \\ 4 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

Tratando la fila 1
Tratando la columna 1

$$\begin{bmatrix} 8 & 8 & -5 \\ 1/2 & -7 & -4 \\ 1/2 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

Tratando la fila 2
Tratando la columna 2

$$\begin{bmatrix} 8 & 8 & -5 \\ 1/2 & -11 & -3/2 \\ 1/2 & 4/11 & -7 \end{bmatrix}$$

Tratando la fila 3

$$\begin{bmatrix} 8 & 8 & -5 \\ 1/2 & -11 & -3/2 \\ 1/2 & 4/11 & -87/22 \end{bmatrix}$$

La factorización final es la siguiente, en la que aparecen las matrices L y U, y el vector de permutaciones:

$$\left[\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 4/11 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 & 8 & -5 \\ 0 & -11 & -3/2 \\ 0 & 0 & -87/22 \end{bmatrix}, [1,2,3]\right]$$

Determinante

El valor del determinante viene dado por el producto de los elementos de la diagonal principal, que es la diagonal principal de U, ya que |L| = 1. Además, hay que considerar el número realizado de permutaciones de filas(0), ya que el determinante cambia de signo en cada una. Por tanto, es

$$|A| = |L|\,|U| = \prod_{i=1}^{3} u_{ii} \times (-1)^{\text{número de permutaciones}} = 348$$

Resolución del sistema

Sabemos que P A = L U, siendo P la matriz que premultiplicada por A produce las permutaciones de filas en A que se han realizado, si hay pivotación. Sin pivotación, P sería la matriz identidad.
Queremos resolver A x = b ⇒ P A x = P b ⇒ L U x = P b. Llamando y = U x, podemos resolver el sistema en dos pasos:

[1] L y = P b, de donde se obtiene el vector y,
[2] U x = y, de donde ya se puede obtener el vector solución x.

En nuestro caso es

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P.b = \begin{bmatrix} 2 \\ 15 \\ 14 \end{bmatrix}$$

Resolvemos entonces el primer sistema triangular

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 4/11 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 15 \\ 14 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 14 \\ 87/11 \end{bmatrix}$$

por sustitución hacia adelante ($y_1 \Rightarrow y_2 \Rightarrow y_3$). Resolvemos ahora

$$\begin{bmatrix} 8 & 8 & -5 \\ 0 & -11 & -3/2 \\ 0 & 0 & -87/22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 14 \\ 87/11 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

por sustitución hacia atrás($x_3 \Rightarrow x_2 \Rightarrow x_1$), resultando el vector pedido.

Mark summary: