Sistemas lineales

Question 1

Top 1 Bottom Focus Help

1.1

Obtener la factorización de Crout de la siguiente matriz, sin utilizar pivotación

$$\begin{bmatrix} 6 & -1 & 0 & 2 & -3 \\ -6 & -2 & -6 & 2 & 1 \\ -5 & -1 & -6 & -1 & 1 \\ -5 & -5 & 3 & -5 & -3 \\ 1 & -2 & -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} 6 & -1/6 & 0 & 1/3 & -1/2 \\ -6 & -3 & 2 & -4/3 & 2/3 \\ -5 & -11/6 & -7/3 & 16/21 & 5/42 \\ -5 & -35/6 & 44/3 & -156/7 & \frac{47}{312} \\ 1 & -11/6 & 5/3 & -1/21 & \frac{2369}{936} \end{bmatrix}$$

1.2

Introducir el vector de permutaciones:
You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

1.3

Entrar el valor del determinante:
You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$-2369$$

1.4

Resolver el sistema lineal A **x=b** cuando **b** es el vector siguiente

$$\begin{bmatrix} 31 \\ 16 \\ 17 \\ -50 \\ 44 \end{bmatrix}$$

You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} 8 & -7 & -7 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Solution:

Factorización

En cada etapa de la resolución se muestran los valores actuales de la matriz y del vector de permutaciones de filas:

Tratando la (sub)columna 1

$$\left[\begin{bmatrix} 6 & -1 & 0 & 2 & -3 \\ -6 & -2 & -6 & 2 & 1 \\ -5 & -1 & -6 & -1 & 1 \\ -5 & -5 & 3 & -5 & -3 \\ 1 & -2 & -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}, [1,2,3,4,5]\right]$$

Tratando la (sub)fila 1

$$\left[\begin{bmatrix} 6 & -1/6 & 0 & 1/3 & -1/2 \\ -6 & -2 & -6 & 2 & 1 \\ -5 & -1 & -6 & -1 & 1 \\ -5 & -5 & 3 & -5 & -3 \\ 1 & -2 & -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}, [1,2,3,4,5]\right]$$

Tratando la (sub)columna 2

$$\left[\begin{bmatrix} 6 & -1/6 & 0 & 1/3 & -1/2 \\ -6 & -3 & -6 & 2 & 1 \\ -5 & -11/6 & -6 & -1 & 1 \\ -5 & -35/6 & 3 & -5 & -3 \\ 1 & -11/6 & -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}, [1,2,3,4,5]\right]$$

Tratando la (sub)fila 2

$$\left[\begin{bmatrix} 6 & -1/6 & 0 & 1/3 & -1/2 \\ -6 & -3 & 2 & -4/3 & 2/3 \\ -5 & -11/6 & -6 & -1 & 1 \\ -5 & -35/6 & 3 & -5 & -3 \\ 1 & -11/6 & -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}, [1,2,3,4,5]\right]$$

Tratando la (sub)columna 3

$$\left[\begin{bmatrix} 6 & -1/6 & 0 & 1/3 & -1/2 \\ -6 & -3 & 2 & -4/3 & 2/3 \\ -5 & -11/6 & -7/3 & -1 & 1 \\ -5 & -35/6 & 44/3 & -5 & -3 \\ 1 & -11/6 & 5/3 & 4 & 1 \end{bmatrix}, [1,2,3,4,5]\right]$$

Tratando la (sub)fila 3

$$\left[\begin{bmatrix} 6 & -1/6 & 0 & 1/3 & -1/2 \\ -6 & -3 & 2 & -4/3 & 2/3 \\ -5 & -11/6 & -7/3 & 16/21 & 5/42 \\ -5 & -35/6 & 44/3 & -5 & -3 \\ 1 & -11/6 & 5/3 & 4 & 1 \end{bmatrix}, [1,2,3,4,5]\right]$$

Tratando la (sub)columna 4

$$\left[\begin{bmatrix} 6 & -1/6 & 0 & 1/3 & -1/2 \\ -6 & -3 & 2 & -4/3 & 2/3 \end{bmatrix}, [1,2,3,4,5]\right]$$

$$\begin{matrix} -5 & -11/6 & -7/3 & 16/21 & 5/42 \\ -5 & -35/6 & 44/3 & -156/7 & -3 \\ 1 & -11/6 & 5/3 & -1/21 & 1 \end{bmatrix}$$

Tratando la (sub)fila 4

$$[\begin{bmatrix} 6 & -1/6 & 0 & 1/3 & -1/2 \\ -6 & -3 & 2 & -4/3 & 2/3 \\ -5 & -11/6 & -7/3 & 16/21 & 5/42 \\ -5 & -35/6 & 44/3 & -156/7 & \frac{47}{312} \\ 1 & -11/6 & 5/3 & -1/21 & 1 \end{bmatrix},[1,2,3,4,5]]$$

Tratando la (sub)columna 5

$$[\begin{bmatrix} 6 & -1/6 & 0 & 1/3 & -1/2 \\ -6 & -3 & 2 & -4/3 & 2/3 \\ -5 & -11/6 & -7/3 & 16/21 & 5/42 \\ -5 & -35/6 & 44/3 & -156/7 & \frac{47}{312} \\ 1 & -11/6 & 5/3 & -1/21 & \frac{2369}{936} \end{bmatrix},[1,2,3,4,5]]$$

$$[\begin{bmatrix} 6 & -1/6 & 0 & 1/3 & -1/2 \\ -6 & -3 & 2 & -4/3 & 2/3 \\ -5 & -11/6 & -7/3 & 16/21 & 5/42 \\ -5 & -35/6 & 44/3 & -156/7 & \frac{47}{312} \\ 1 & -11/6 & 5/3 & -1/21 & \frac{2369}{936} \end{bmatrix},[1,2,3,4,5]]$$

La factorización final es la siguiente, en la que aparecen las matrices L y U, y el vector de permutaciones:

$$[\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & -11/6 & -7/3 & 0 & 0 \\ -5 & -35/6 & 44/3 & -156/7 & 0 \\ 1 & -11/6 & 5/3 & -1/21 & \frac{2369}{936} \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 & -1/6 & 0 & 1/3 & -1/2 \\ 0 & 1 & 2 & -4/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 16/21 & 5/42 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{47}{312} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},[1,2,3,4,5]]$$

Determinante

El valor del determinante viene dado por el producto de los elementos de la diagonal principal, que es la diagonal principal de L, ya que |U| = 1. Además, hay que considerar el número realizado de permutaciones de filas (0), ya que el determinante cambia de signo en cada una. Por tanto, es

$$|A| = |L|\,|U| = \prod_{i=1}^{5} l_{ii} \times (-1)^{\text{número de permutaciones}} = -2369$$

Resolución del sistema

Sabemos que P A = L U, siendo P la matriz que premultiplicada por A produce las permutaciones de filas en A que se han realizado, si hay pivotación. Sin pivotación, P sería la matriz identidad.
Queremos resolver A x = b ⇒ P A x = P b ⇒ L U x = P b. Llamando y = U x, podemos resolver el sistema en dos pasos:

[1] L y = P b, de donde se obtiene el vector y,
[2] U x = y, de donde ya se puede obtener el vector solución x.

P.b es el vector resultante de aplicar las permutaciones indicadas por el vector pfilas = [1,2,3,4,5] al vector

$$b = \begin{bmatrix} 31 \\ 16 \\ 17 \\ -50 \\ 44 \end{bmatrix}$$

O también se puede obtener premultiplicando por la matriz P, que se puede construir fácilmente a partir del vector de permutaciones. En nuestro caso es

$$P = \begin{bmatrix} 1\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,1\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,1 \end{bmatrix} \Rightarrow P.b = \begin{bmatrix} 31 \\ 16 \\ 17 \\ -50 \\ 44 \end{bmatrix}$$

Resolvemos entonces el primer sistema triangular

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & -11/6 & -7/3 & 0 & 0 \\ -5 & -35/6 & 44/3 & -156/7 & 0 \\ 1 & -11/6 & 5/3 & -1/21 & \frac{2369}{936} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 \\ 16 \\ 17 \\ -50 \\ 44 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31/6 \\ -47/3 \\ -127/21 \\ 47/39 \\ 8 \end{bmatrix}$$

por sustitución hacia adelante ($y_1 \Rightarrow y_2 \Rightarrow y_3 \Rightarrow y_4 \Rightarrow y_5$). Resolvemos ahora

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/6 & 0 & 1/3 & -1/2 \\ 0 & 1 & 2 & -4/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 16/21 & 5/42 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{47}{312} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31/6 \\ -47/3 \\ -127/21 \\ 47/39 \\ 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -7 \\ -7 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}$$

por sustitución hacia atrás($x_5 \Rightarrow x_4 \Rightarrow x_3 \Rightarrow x_2 \Rightarrow x_1$), resultando el vector pedido.

Mark summary:

Question	Value	Your mark
1.1	1.50	-
1.2	0.50	-
1.3	0.50	-
1.4	1.00	-
Total	3.50	0.00

New Version Click here to see a new version of this quiz.
New Quiz Click here to select a new quiz.

If you have technical problems, you can send email to the administrator.
Mathematical questions can be sent to the teacher.