

Sistemas lineales

Question 1

[Top 1](#) [Bottom](#) [Focus](#) [Help](#)

1.1

Obtener la factorización de Crout de la siguiente matriz, utilizando pivotación parcial

$$\begin{bmatrix} 2 & -6 & -2 & 8 \\ 1 & 5 & 6 & -6 \\ 3 & 0 & -3 & -9 \\ -8 & 2 & -9 & 3 \end{bmatrix}$$

You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} -8 & -1/4 & 9/8 & -3/8 \\ 2 & -11/2 & 17/22 & -35/22 \\ 3 & 3/4 & -153/22 & 49/51 \\ 1 & 21/4 & 9/11 & 33/17 \end{bmatrix}$$

1.2

Introducir el vector de permutaciones:

You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

1.3

Entrar el valor del determinante:

You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

-594

1.4

Resolver el sistema lineal $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ cuando \mathbf{b} es el vector siguiente

$$\begin{bmatrix} -26 \\ 28 \\ 36 \\ -50 \end{bmatrix}$$

You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} -4 & -8 & 5 & -7 \end{bmatrix}$$

Solution:

Factorización

En cada etapa de la resolución se muestran los valores actuales de la matriz y del vector de permutaciones de filas:

Tratando la (sub)columna 1

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -6 & -2 & 8 & \\ 1 & 5 & 6 & -6 & \\ 3 & 0 & -3 & -9 & \\ -8 & 2 & -9 & 3 & \end{array} \right], [1,2,3,4]$$

Elementos de la (sub)columna donde buscar el máximo:

$$[2,1,3,-8]$$

Máximo en fila 4 con valor = 8 ==> Intercambio de filas 1 y 4

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -8 & 2 & -9 & 3 & \\ 1 & 5 & 6 & -6 & \\ 3 & 0 & -3 & -9 & \\ 2 & -6 & -2 & 8 & \end{array} \right], [4,2,3,1]$$

Tratando la (sub)fila 1

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -8 & -1/4 & 9/8 & -3/8 & \\ 1 & 5 & 6 & -6 & \\ 3 & 0 & -3 & -9 & \\ 2 & -6 & -2 & 8 & \end{array} \right], [4,2,3,1]$$

Tratando la (sub)columna 2

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -8 & -1/4 & 9/8 & -3/8 & \\ 1 & 21/4 & 6 & -6 & \\ 3 & 3/4 & -3 & -9 & \\ 2 & -11/2 & -2 & 8 & \end{array} \right], [4,2,3,1]$$

Elementos de la (sub)columna donde buscar el máximo:

$$[21/4, 3/4, -11/2]$$

Máximo en fila 4 con valor = 11/2 ==> Intercambio de filas 2 y 4

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -8 & -1/4 & 9/8 & -3/8 & \\ 2 & -11/2 & -2 & 8 & \\ 3 & 3/4 & -3 & -9 & \\ 1 & 21/4 & 6 & -6 & \end{array} \right], [4,1,3,2]$$

Tratando la (sub)fila 2

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -8 & -1/4 & 9/8 & -3/8 & \\ 2 & -11/2 & 17/22 & -35/22 & \\ 3 & 3/4 & -3 & -9 & \\ 1 & 21/4 & 6 & -6 & \end{array} \right], [4,1,3,2]$$

Tratando la (sub)columna 3

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -8 & -1/4 & 9/8 & -3/8 & \\ 2 & -11/2 & 17/22 & -35/22 & \\ 3 & 3/4 & -153/22 & -9 & \\ 1 & 21/4 & 9/11 & -6 & \end{array} \right], [4,1,3,2]$$

Elementos de la (sub)columna donde buscar el máximo:

$$[-153/22, 9/11]$$

Máximo en fila 3 con valor = 153/22

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -8 & -1/4 & 9/8 & -3/8 & \\ 2 & -11/2 & 17/22 & -35/22 & \\ 3 & 3/4 & -153/22 & -9 & \\ 1 & 21/4 & 9/11 & -6 & \end{array} \right], [4,1,3,2]$$

Tratando la (sub)fila 3

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -8 & -1/4 & 9/8 & -3/8 & \\ 2 & -11/2 & 17/22 & -35/22 & \\ 3 & 3/4 & -153/22 & 49/51 & \\ 1 & 21/4 & 9/11 & -6 & \end{array} \right], [4,1,3,2]$$

Tratando la (sub)columna 4

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -8 & -1/4 & 9/8 & -3/8 & \\ 2 & -11/2 & 17/22 & -35/22 & \\ 3 & 3/4 & -153/22 & 49/51 & \\ 1 & 21/4 & 9/11 & 33/17 & \end{array} \right], [4,1,3,2]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -8 & -1/4 & 9/8 & -3/8 & \\ 2 & -11/2 & 17/22 & -35/22 & \\ 3 & 3/4 & -153/22 & 49/51 & \\ 1 & 21/4 & 9/11 & 33/17 & \end{array} \right], [4,1,3,2]$$

La factorización final es la siguiente, en la que aparecen las matrices L y U, y el vector de permutaciones:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} -8 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1/4 & 9/8 & -3/8 \\ 2 & -11/2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 17/22 & -35/22 \\ 3 & 3/4 & -153/22 & 0 & 0 & 0 & 1 & 49/51 \\ 1 & 21/4 & 9/11 & 33/17 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right], [4,1,3,2]$$

Determinante

El valor del determinante viene dado por el producto de los elementos de la diagonal principal, que es la diagonal principal de L, ya que $|U| = 1$. Además, hay que considerar el número realizado de permutaciones de filas (2), ya que el determinante cambia de signo en cada una. Por tanto, es

$$|A| = |L| |U| = \prod_{i=1}^4 l_{ii} \times (-1)^{\text{número de permutaciones}} = -594$$

Resolución del sistema

Sabemos que $PA = LU$, siendo P la matriz que premultiplicada por A produce las permutaciones de filas en A que se han realizado, si hay pivotación. Sin pivotación, P sería la matriz identidad.

Queremos resolver $Ax = b \Rightarrow PAx = Pb \Rightarrow LUx = Pb$. Llamando $y = Ux$, podemos resolver el sistema en dos pasos:

[1] $Ly = Pb$, de donde se obtiene el vector y,

[2] $Ux = y$, de donde ya se puede obtener el vector solución x.

P.b es el vector resultante de aplicar las permutaciones indicadas por el vector pfilas = [4,1,3,2] al vector

$$b = \begin{bmatrix} -26 \\ 28 \\ 36 \\ -50 \end{bmatrix}$$

O también se puede obtener premultiplicando por la matriz P, que se puede construir fácilmente a partir del vector de permutaciones.

En nuestro caso es

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow P.b = \begin{bmatrix} -50 \\ -26 \\ 36 \\ 28 \end{bmatrix}$$

Resolvemos entonces el primer sistema triangular

$$\begin{bmatrix} -8 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -11/2 & 0 & 0 \\ 3 & 3/4 & -153/22 & 0 \\ 1 & 21/4 & 9/11 & 33/17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -50 \\ -26 \\ 36 \\ 28 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25/4 \\ 7 \\ -88/51 \\ -7 \end{bmatrix}$$

por sustitución hacia adelante ($y_1 \Rightarrow y_2 \Rightarrow y_3 \Rightarrow y_4$). Resolvemos ahora

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/4 & 9/8 & -3/8 \\ 0 & 1 & 17/22 & -35/22 \\ 0 & 0 & 1 & 49/51 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25/4 \\ 7 \\ -88/51 \\ -7 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -8 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix}$$

por sustitución hacia atrás ($x_4 \Rightarrow x_3 \Rightarrow x_2 \Rightarrow x_1$), resultando el vector pedido.



(cc) Jesús García Quesada 2010

Mark summary:

Question	Value	Your mark
1.1	1.50	-
1.2	0.50	-
1.3	0.50	-
1.4	1.00	-
Total	3.50	0.00

[New Version](#) Click here to see a new version of this quiz.

[New Quiz](#) Click here to select a new quiz.

If you have technical problems, you can send email to the [administrator](#).
Mathematical questions can be sent to the [teacher](#).