Sistemas lineales

Question 1 Top 1 Bottom Focus Help

1.1

Obtener la factorización de Crout de la siguiente matriz, sin utilizar pivotación

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 6 & 7 \\ 6 & 1 & 9 & 0 \\ 6 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -6 & -5 & 8 \end{bmatrix}$$

You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1/3 & 2 & 7/3 \\ 6 & 3 & -1 & -14/3 \\ 6 & 3 & -7 & 0 \\ 2 & -16/3 & -43/3 & -194/9 \end{bmatrix}$$

1.2

Introducir el vector de permutaciones:
You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

1.3

Entrar el valor del determinante:
You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$1358$$

1.4

Resolver el sistema lineal A **x=b** cuando **b** es el vector siguiente

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 24 \\ 24 \\ 22 \end{bmatrix}$$

You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} 5 & -6 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Solution:

Factorización

En cada etapa de la resolución se muestran los valores actuales de la matriz y del vector de permutaciones de filas:

Tratando la (sub)columna 1

$$\left[\begin{bmatrix} 3 & -1 & 6 & 7 \\ 6 & 1 & 9 & 0 \\ 6 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -6 & -5 & 8 \end{bmatrix},[1,2,3,4]\right]$$

Tratando la (sub)fila 1

$$\left[\begin{bmatrix} 3 & -1/3 & 2 & 7/3 \\ 6 & 1 & 9 & 0 \\ 6 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -6 & -5 & 8 \end{bmatrix},[1,2,3,4]\right]$$

Tratando la (sub)columna 2

$$\left[\begin{bmatrix} 3 & -1/3 & 2 & 7/3 \\ 6 & 3 & 9 & 0 \\ 6 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & -16/3 & -5 & 8 \end{bmatrix},[1,2,3,4]\right]$$

Tratando la (sub)fila 2

$$\left[\begin{bmatrix} 3 & -1/3 & 2 & 7/3 \\ 6 & 3 & -1 & -14/3 \\ 6 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & -16/3 & -5 & 8 \end{bmatrix},[1,2,3,4]\right]$$

Tratando la (sub)columna 3

$$\left[\begin{bmatrix} 3 & -1/3 & 2 & 7/3 \\ 6 & 3 & -1 & -14/3 \\ 6 & 3 & -7 & 0 \\ 2 & -16/3 & -43/3 & 8 \end{bmatrix},[1,2,3,4]\right]$$

Tratando la (sub)fila 3

$$\left[\begin{bmatrix} 3 & -1/3 & 2 & 7/3 \\ 6 & 3 & -1 & -14/3 \\ 6 & 3 & -7 & 0 \\ 2 & -16/3 & -43/3 & 8 \end{bmatrix},[1,2,3,4]\right]$$

Tratando la (sub)columna 4

$$\left[\begin{bmatrix} 3 & -1/3 & 2 & 7/3 \\ 6 & 3 & -1 & -14/3 \\ 6 & 3 & -7 & 0 \\ 2 & -16/3 & -43/3 & -194/9 \end{bmatrix},[1,2,3,4]\right]$$

$$\left[\begin{bmatrix} 3 & -1/3 & 2 & 7/3 \\ 6 & 3 & -1 & -14/3 \\ 6 & 3 & -7 & 0 \\ 2 & -16/3 & -43/3 & -194/9 \end{bmatrix},[1,2,3,4]\right]$$

La factorización final es la siguiente, en la que aparecen las matrices L y U, y el vector de permutaciones:

$$\left[\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & -7 & 0 \\ 2 & -16/3 & -43/3 & -194/9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1/3 & 2 & 7/3 \\ 0 & 1 & -1 & -14/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, [1,2,3,4]\right]$$

Determinante

El valor del determinante viene dado por el producto de los elementos de la diagonal principal, que es la diagonal principal de L, ya que |U| = 1. Además, hay que considerar el número realizado de permutaciones de filas (0), ya que el determinante cambia de signo en cada una. Por tanto, es

$$|A| = |L|\,|U| = \prod_{i=1}^{4} l_{ii} \times (-1)^{\text{número de permutaciones}} = 1358$$

Resolución del sistema

Sabemos que P A = L U, siendo P la matriz que premultiplicada por A produce las permutaciones de filas en A que se han realizado, si hay pivotación. Sin pivotación, P sería la matriz identidad.
Queremos resolver A x = b ⇒ P A x = P b ⇒ L U x = P b. Llamando y = U x, podemos resolver el sistema en dos pasos:

[1] L y = P b, de donde se obtiene el vector y,
[2] U x = y, de donde ya se puede obtener el vector solución x.

P.b es el vector resultante de aplicar las permutaciones indicadas por el vector pfilas = [1,2,3,4] al vector

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 24 \\ 24 \\ 22 \end{bmatrix}$$

O también se puede obtener premultiplicando por la matriz P, que se puede construir fácilmente a partir del vector de permutaciones. En nuestro caso es

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P.b = \begin{bmatrix} 0 \\ 24 \\ 24 \\ 22 \end{bmatrix}$$

Resolvemos entonces el primer sistema triangular

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & -7 & 0 \\ 2 & -16/3 & -43/3 & -194/9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 24 \\ 24 \\ 22 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

por sustitución hacia adelante ($y_1 \Rightarrow y_2 \Rightarrow y_3 \Rightarrow y_4$). Resolvemos ahora

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/3 & 2 & 7/3 \\ 0 & 1 & -1 & -14/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

por sustitución hacia atrás($x_4 \Rightarrow x_3 \Rightarrow x_2 \Rightarrow x_1$), resultando el vector pedido.