

Sistemas lineales

Question 1

[Top 1](#) [Bottom](#) [Focus](#) [Help](#)

1.1

Obtener la factorización de Crout de la siguiente matriz, utilizando pivotación parcial

$$\begin{bmatrix} 8 & 1 & 3 \\ 3 & -6 & -2 \\ -3 & 9 & -6 \end{bmatrix}$$

You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} 8 & 1/8 & 3/8 \\ -3 & 75/8 & -13/25 \\ 3 & -51/8 & -161/25 \end{bmatrix}$$

1.2

Introducir el vector de permutaciones:

You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

1.3

Entrar el valor del determinante:

You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

483

1.4

Resolver el sistema lineal $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ cuando \mathbf{b} es el vector siguiente

$$\begin{bmatrix} 12 \\ -21 \\ 33 \end{bmatrix}$$

You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Solution:

Factorización

En cada etapa de la resolución se muestran los valores actuales de la matriz y del vector de permutaciones de filas:

Tratando la (sub)columna 1

$$\left[\begin{bmatrix} 8 & 1 & 3 \end{bmatrix}, [1,2,3] \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} & & & \\ & 3 & -6 & -2 \\ & -3 & 9 & -6 \\ & & & \end{array} \right]$$

Elementos de la (sub)columna donde buscar el máximo:

$$[8, 3, -3]$$

Máximo en fila 1 con valor = 8

$$\left[\begin{array}{ccc|c} & 8 & 1 & 3 \\ & 3 & -6 & -2 \\ & -3 & 9 & -6 \\ & & & \end{array} \right], [1, 2, 3]$$

Tratando la (sub)fila 1

$$\left[\begin{array}{ccc|c} & 8 & 1/8 & 3/8 \\ & 3 & -6 & -2 \\ & -3 & 9 & -6 \\ & & & \end{array} \right], [1, 2, 3]$$

Tratando la (sub)columna 2

$$\left[\begin{array}{ccc|c} & 8 & 1/8 & 3/8 \\ & 3 & -51/8 & -2 \\ & -3 & 75/8 & -6 \\ & & & \end{array} \right], [1, 2, 3]$$

Elementos de la (sub)columna donde buscar el máximo:

$$[-51/8, 75/8]$$

Máximo en fila 3 con valor = 75/8 ==> Intercambio de filas 2 y 3

$$\left[\begin{array}{ccc|c} & 8 & 1/8 & 3/8 \\ & -3 & 75/8 & -6 \\ & 3 & -51/8 & -2 \\ & & & \end{array} \right], [1, 3, 2]$$

Tratando la (sub)fila 2

$$\left[\begin{array}{ccc|c} & 8 & 1/8 & 3/8 \\ & -3 & 75/8 & -13/25 \\ & 3 & -51/8 & -2 \\ & & & \end{array} \right], [1, 3, 2]$$

Tratando la (sub)columna 3

$$\left[\begin{array}{ccc|c} & 8 & 1/8 & 3/8 \\ & -3 & 75/8 & -13/25 \\ & 3 & -51/8 & -161/25 \\ & & & \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} & 8 & 1/8 & 3/8 \\ & -3 & 75/8 & -13/25 \\ & 3 & -51/8 & -161/25 \\ & & & \end{array} \right]$$

La factorización final es la siguiente, en la que aparecen las matrices L y U, y el vector de permutaciones:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} & & & & & \\ & 8 & 0 & 0 & & \\ & -3 & 75/8 & 0 & & \\ & 3 & -51/8 & -161/25 & & \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc|ccc} & & & & & \\ & 1 & 1/8 & 3/8 & & \\ & 0 & 1 & -13/25 & & \\ & 0 & 0 & 1 & & \end{array} \right], [1, 3, 2]$$

Determinante

El valor del determinante viene dado por el producto de los elementos de la diagonal principal, que es la diagonal principal de L, ya que $|U| = 1$. Además, hay que considerar el número realizado de permutaciones de filas (1), ya que el determinante cambia de signo en cada una. Por tanto, es

$$|A| = |L| |U| = \prod_{i=1}^3 l_{ii} \times (-1)^{\text{número de permutaciones}} = 483$$

Resolución del sistema

Sabemos que $PA = LU$, siendo P la matriz que premultiplicada por A produce las permutaciones de filas en A que se han realizado, si hay pivotación. Sin pivotación, P sería la matriz identidad.

Queremos resolver $Ax = b \Rightarrow PAx = Pb \Rightarrow LUx = Pb$. Llamando $y = Ux$, podemos resolver el sistema en dos pasos:

- [1] $Ly = Pb$, de donde se obtiene el vector y ,
- [2] $Ux = y$, de donde ya se puede obtener el vector solución x .

$P.b$ es el vector resultante de aplicar las permutaciones indicadas por el vector $p_{\text{filas}} = [1,3,2]$ al vector

$$b = \begin{bmatrix} 12 \\ -21 \\ 33 \end{bmatrix}$$

O también se puede obtener premultiplicando por la matriz P , que se puede construir fácilmente a partir del vector de permutaciones. En nuestro caso es

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow P.b = \begin{bmatrix} 12 \\ 33 \\ -21 \end{bmatrix}$$

Resolvemos entonces el primer sistema triangular

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ -3 & 75/8 & 0 \\ 3 & -51/8 & -161/25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 33 \\ -21 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

por sustitución hacia adelante ($y_1 \Rightarrow y_2 \Rightarrow y_3$). Resolvemos ahora

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/8 & 3/8 \\ 0 & 1 & -13/25 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

por sustitución hacia atrás ($x_3 \Rightarrow x_2 \Rightarrow x_1$), resultando el vector pedido.



(cc) Jesús García Quesada 2010

Mark summary:

Question	Value	Your mark
1.1	1.50	-
1.2	0.50	-
1.3	0.50	-
1.4	1.00	-
Total	3.50	0.00

[New Version](#) Click here to see a new version of this quiz.

[New Quiz](#) Click here to select a new quiz.

If you have technical problems, you can send email to the [administrator](#).
Mathematical questions can be sent to the [teacher](#).