Raices

Question 1 Top 1 Bottom Focus Help

Obtener una raiz de la función $f(x) = \sin(x) + \cos(x) - 1.3$ en el intervalo [0,1] por el método de bisección. Entrar también la sexta iteración resultante del proceso iterativo y dar los resultados con tres cifras decimales correctas.
You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} 0.406 & 0.381 \end{bmatrix}$$

Solution:

Dada una función continua, el metodo de bisección localiza la raíz real de $f(x)=0$ obteniendo una sucesión de intervalos de longitudes cada vez más pequeñas. Suponemos que se conoce un intervalo [a,b] en cuyos extremos la función tiene valores con signos diferentes, o sea, se verifica que $f(a).f(b) < 0 \Rightarrow$ por el teorema del valor intermedio para funciones continuas, existe una raiz de f(x), o sea, $\exists \alpha \in]a,b[$, tal que $f(\alpha)=0$.

La función se evalúa entonces en el punto medio $m=(a+b)/2$ y si $f(m) \neq 0$, su signo decide cuál de los subintervalos]a,m[ó]m,b[contiene la raiz. Se continúa la búsqueda de la raiz en el subintervalo en el que f(m) tiene signo contrario a f(a) ó f(b). Y así sucesivamente. El método genera por tanto una sucesión de aproximaciones $\{x_n\}$ que converge a una raiz concreta $\alpha \in]a,b[$ con la propiedad:

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}, \quad n=0,1,2,\ldots$$

Terminamos las iteraciones cuando $|x_n - \alpha| < \epsilon$, o cuando $|f(x_n)| < \epsilon$, siendo ϵ la tolerancia con la cual se quiere calcular la raiz. Como en general no se conoce a priori el valor de α, en la práctica usaremos los criterios del error absoluto o error relativo: $|e_n| = |x_n - x_{n-1}| < \epsilon$, o bien $|x_n - x_{n-1}|/|x_n| < \epsilon$, respectivamente. Tiene orden de convergencia 1 (*lineal*) y constante de error asintótico 1/2 (ver tabla). Llamando $x_0=a$, $x_1=b$ para arrancar el proceso, las iteraciones sucesivas son:

MÉTODO DE BISECCIÓN					
k	x_k	$f(x_k)$	$\|x_k - x_{k-1}\| / \|x_k\|$	$\|e_k\|$	$\|e_k\| / \|e_{k-1}\|$
0	0.000000000000000	-0.300000000000000	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
1	1.000000000000000	0.081773290676036	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
2	0.500000000000000	0.057008100494576	1.0000000000	0.5000000000	0.0000000000
3	0.250000000000000	-0.083683619034832	1.0000000000	0.2500000000	0.5000000000
4	0.375000000000000	-0.003219849001638	0.3333333333	0.1250000000	0.5000000000
5	0.437500000000000	0.029489940629874	0.1428571429	0.0625000000	0.5000000000
6	0.406250000000000	0.013776486035853	0.0769230769	0.0312500000	0.5000000000
7	0.390625000000000	0.005437670459426	0.0400000000	0.0156250000	0.5000000000
8	0.382812500000000	0.001148618431545	0.0204081633	0.0078125000	0.5000000000
9	0.378906250000000	-0.001025704910265	0.0103092784	0.0039062500	0.5000000000
10	0.380859375000000	0.000063936435023	0.0051282051	0.0019531250	0.5000000000
11	0.379882812500000	-0.000480264578373	0.0025706941	0.0009765625	0.5000000000

12	0.380371093750000	-0.000208009124398	0.0012836970	0.0004882812	0.5000000000
13	0.380615234375000	-0.000071997603814	0.0006414368	0.0002441406	0.5000000000
14	0.380737304687500	-0.000004020898671	0.0003206156	0.0001220703	0.5000000000
15	0.380798339843750	0.000029960189671	0.0001602821	0.0000610352	0.5000000000
16	0.380767822265625	0.000012970250866	0.0000801475	0.0000305176	0.5000000000
17	0.380752563476562	0.000004474827438	0.0000400753	0.0000152588	0.5000000000
18	0.380744934082031	0.000000227002219	0.0000200381	0.0000076294	0.5000000000
19	0.380741119384766	-0.000001896938767	0.0000100191	0.0000038147	0.5000000000
20	0.380743026733398	-0.000000834965910	0.0000050095	0.0000019073	0.5000000000
21	0.380743980407715	-0.000000303981254	0.0000025048	0.0000009537	0.5000000000
22	0.380744457244873	-0.000000038489370	0.0000012524	0.0000004768	0.5000000000
23	0.380744695663452	0.000000094256461	0.0000006262	0.0000002384	0.5000000000
24	0.380744576454163	0.000000027883555	0.0000003131	0.0000001192	0.5000000000
25	0.380744516849518	-0.000000005302905	0.0000001565	0.0000000596	0.5000000000
26	0.380744546651840	0.000000011290325	0.0000000783	0.0000000298	0.5000000000
27	0.380744531750679	0.000000002993710	0.0000000391	0.0000000149	0.5000000000
28	0.380744524300098	-0.000000001154597	0.0000000196	0.0000000075	0.5000000000
29	0.380744528025389	0.000000000919556	0.0000000098	0.0000000037	0.5000000000
30	0.380744526162744	-0.000000000117520	0.0000000049	0.0000000019	0.5000000000

La convergencia con la tolerancia pedida se produjo en la iteración: 14. A continuación aparecen la gráfica de la función, los diferentes puntos de la sucesión $\{x_n\}$ sobre el eje x con un pequeño círculo y los puntos correspondientes sobre la curva con un cuadrado, ambas sucesiones de puntos se van aproximando progresivamente a la solución. También aparecen la iteración pedida, dentro de un cuadrado algo mayor, y el punto donde se ha producido la convergencia, en un círculo rojo.
Sugerencia: asignar a cada uno de los puntos obtenidos el número de iteración que le corresponde, y seguir así gráficamente la convergencia del proceso.