Raices

Question 1 Top 1 Bottom Focus Help

Obtener una raiz de la función $f(x) = \ln(4x) - 1.8$ en el intervalo [1,2] por el método de bisección. Entrar también la octava iteración resultante del proceso iterativo y dar los resultados con tres cifras decimales correctas.
You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} 1.51 & 1.51 \end{bmatrix}$$

Solution:

Dada una función continua, el metodo de bisección localiza la raíz real de $f(x)=0$ obteniendo una sucesión de intervalos de longitudes cada vez más pequeñas. Suponemos que se conoce un intervalo [a,b] en cuyos extremos la función tiene valores con signos diferentes, o sea, se verifica que $f(a).f(b) < 0 \Rightarrow$ por el teorema del valor intermedio para funciones continuas, existe una raiz de f(x), o sea, $\exists \alpha \in]a,b[$, tal que $f(\alpha)=0$.

La función se evalúa entonces en el punto medio $m=(a+b)/2$ y si $f(m) \neq 0$, su signo decide cuál de los subintervalos $]a,m[$ ó $]m,b[$ contiene la raiz. Se continúa la búsqueda de la raiz en el subintervalo en el que f(m) tiene signo contrario a f(a) ó f(b). Y así sucesivamente. El método genera por tanto una sucesión de aproximaciones $\{x_n\}$ que converge a una raiz concreta $\alpha \in]a,b[$ con la propiedad:

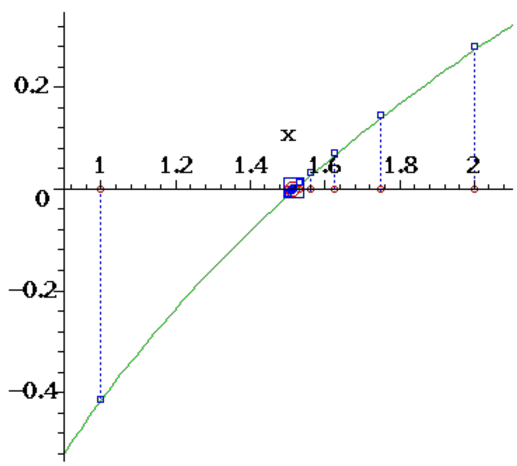
$$|x_n - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}, \quad n=0,1,2,\ldots$$

Terminamos las iteraciones cuando $|x_n - \alpha| < \epsilon$, o cuando $|f(x_n)| < \epsilon$, siendo ϵ la tolerancia con la cual se quiere calcular la raiz. Como en general no se conoce a priori el valor de α, en la práctica usaremos los criterios del error absoluto o error relativo: $|e_n| = |x_n - x_{n-1}| < \epsilon$, o bien $|x_n - x_{n-1}|/|x_n| < \epsilon$, respectivamente. Tiene orden de convergencia 1 (*lineal*) y constante de error asintótico 1/2 (ver tabla). Llamando $x_0=a$, $x_1=b$ para arrancar el proceso, las iteraciones sucesivas son:

MÉTODO DE BISECCIÓN					
k	x_k	$f(x_k)$	$\lvert x_k - x_{k-1} \rvert / \lvert x_k \rvert$	$\lvert e_k \rvert$	$\lvert e_k \rvert / \lvert e_{k-1} \rvert$
0	1.000000000000000	-0.413705638880109	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
1	2.000000000000000	0.279441541679836	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
2	1.500000000000000	-0.008240530771945	0.3333333333	0.5000000000	0.0000000000
3	1.750000000000000	0.145910149055313	0.1428571429	0.2500000000	0.5000000000
4	1.625000000000000	0.071802176901591	0.0769230769	0.1250000000	0.5000000000
5	1.562500000000000	0.032581463748310	0.0400000000	0.0625000000	0.5000000000
6	1.531250000000000	0.012378756430791	0.0204081633	0.0312500000	0.5000000000
7	1.515625000000000	0.002122256263602	0.0103092784	0.0156250000	0.5000000000
8	1.507812500000000	-0.003045713894841	0.0051813472	0.0078125000	0.5000000000
9	1.511718750000000	-0.000458390329890	0.0025839793	0.0039062500	0.5000000000
10	1.513671875000000	0.000832765433730	0.0012903226	0.0019531250	0.5000000000
11	1.512695312500000	0.000187395937306	0.0006455778	0.0009765625	0.5000000000

12	1.512207031250000	-0.000135445066305	0.0003228931	0.0004882812	0.5000000000
13	1.512451171875000	0.000025988463790	0.0001614205	0.0002441406	0.5000000000
14	1.512329101562500	-0.000054725043660	0.0000807168	0.0001220703	0.5000000000
15	1.512390136718750	-0.000014367475601	0.0000403568	0.0000610352	0.5000000000
16	1.512420654296875	0.000005810697670	0.0000201780	0.0000305176	0.5000000000
17	1.512405395507812	-0.000004278338071	0.0000100891	0.0000152588	0.5000000000
18	1.512413024902344	0.000000766192523	0.0000050445	0.0000076294	0.5000000000
19	1.512409210205078	-0.000001756069593	0.0000025223	0.0000038147	0.5000000000
20	1.512411117553711	-0.000000494937740	0.0000012611	0.0000019073	0.5000000000
21	1.512412071228027	0.000000135627590	0.0000006306	0.0000009537	0.5000000000
22	1.512411594390869	-0.000000179655025	0.0000003153	0.0000004768	0.5000000000
23	1.512411832809448	-0.000000022013705	0.0000001576	0.0000002384	0.5000000000
24	1.512411952018738	0.000000056806946	0.0000000788	0.0000001192	0.5000000000
25	1.512411892414093	0.000000017396621	0.0000000394	0.0000000596	0.5000000000
26	1.512411862611771	-0.000000002308542	0.0000000197	0.0000000298	0.5000000000
27	1.512411877512932	0.000000007544040	0.0000000099	0.0000000149	0.5000000000
28	1.512411870062351	0.000000002617749	0.0000000049	0.0000000075	0.5000000000
29	1.512411866337061	0.000000000154604	0.0000000025	0.0000000037	0.5000000000
30	1.512411864474416	-0.000000001076969	0.0000000012	0.0000000019	0.5000000000

La convergencia con la tolerancia pedida se produjo en la iteración: 12. A continuación aparecen la gráfica de la función, los diferentes puntos de la sucesión $\{x_n\}$ sobre el eje x con un pequeño círculo y los puntos correspondientes sobre la curva con un cuadrado, ambas sucesiones de puntos se van aproximando progresivamente a la solución. También aparecen la iteración pedida, dentro de un cuadrado algo mayor, y el punto donde se ha producido la convergencia, en un círculo rojo.
Sugerencia: asignar a cada uno de los puntos obtenidos el número de iteración que le corresponde, y seguir así gráficamente la convergencia del proceso.



(cc) Jesús García Quesada 2011