Raices

Question 1 Top 1 Bottom Focus Help

Obtener una raiz de la función f(x) = $e^{4x} - 121.5$ en el intervalo [1,2] por el método de bisección. Entrar también la quinta iteración resultante del proceso iterativo y dar los resultados con tres cifras decimales correctas.
You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} 1.19 & 1.20 \end{bmatrix}$$

Solution:

Dada una función continua, el metodo de bisección localiza la raíz real de f(x)=0 obteniendo una sucesión de intervalos de longitudes cada vez más pequeñas. Suponemos que se conoce un intervalo [a,b] en cuyos extremos la función tiene valores con signos diferentes, o sea, se verifica que f(a).f(b) < 0 ⇒ por el teorema del valor intermedio para funciones continuas, existe una raiz de f(x), o sea, $\exists \alpha \in]a,b[$, tal que f(α)=0.

La función se evalúa entonces en el punto medio m=(a+b)/2 y si f(m) ≠ 0, su signo decide cuál de los subintervalos]a,m[ó]m,b[contiene la raiz. Se continúa la búsqueda de la raiz en el subintervalo en el que f(m) tiene signo contrario a f(a) ó f(b). Y así sucesivamente. El método genera por tanto una sucesión de aproximaciones $\{x_n\}$ que converge a una raiz concreta $\alpha \in]a,b[$ con la propiedad:

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}, \quad n=0,1,2,...$$

Terminamos las iteraciones cuando $|x_n - \alpha| < \epsilon$, o cuando $|f(x_n)| < \epsilon$, siendo ϵ la tolerancia con la cual se quiere calcular la raiz. Como en general no se conoce a priori el valor de α, en la práctica usaremos los criterios del error absoluto o error relativo: $|e_n| = |x_n - x_{n-1}| < \epsilon$, o bien $|x_n - x_{n-1}|/|x_n| < \epsilon$, respectivamente. Tiene orden de convergencia 1 (*lineal*) y constante de error asintótico 1/2 (ver tabla). Llamando x_0=a, x_1=b para arrancar el proceso, las iteraciones sucesivas son:

MÉTODO DE BISECCIÓN					
k	x_k	$f(x_k)$	$\|x_k - x_{k-1}\| / \| x_k \|$	$\|e_k\|$	$\|e_k\| / \| e_{k-1}\|$
0	1.000000000000000	-66.901849966855761	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
1	2.000000000000000	2859.457987041728275	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
2	1.500000000000000	281.928793492735123	0.3333333333	0.5000000000	0.0000000000
3	1.250000000000000	26.913159102576603	0.2000000000	0.2500000000	0.5000000000
4	1.125000000000000	-31.482868699478186	0.1111111111	0.1250000000	0.5000000000
5	1.187500000000000	-5.915715472812342	0.0526315789	0.0625000000	0.5000000000
6	1.218750000000000	9.474153210818603	0.0256410256	0.0312500000	0.5000000000
7	1.203125000000000	1.538830417176538	0.0129870130	0.0156250000	0.5000000000
8	1.195312500000000	-2.246676428573596	0.0065359477	0.0078125000	0.5000000000
9	1.199218750000000	-0.368709840977031	0.0032573290	0.0039062500	0.5000000000
10	1.201171875000000	0.581334642482642	0.0016260163	0.0019531250	0.5000000000
11	1.200195312500000	0.105384624116655	0.0008136697	0.0009765625	0.5000000000

12	1.199707031250000	-0.131894099794633	0.0004070004	0.0004882812	0.5000000000
13	1.199951171875000	-0.013312667210340	0.0002034588	0.0002441406	0.5000000000
14	1.200073242187500	0.046021489038001	0.0001017191	0.0001220703	0.5000000000
15	1.200012207031250	0.016350789444351	0.0000508621	0.0000610352	0.5000000000
16	1.199981689453125	0.001518155860151	0.0000254317	0.0000305176	0.5000000000
17	1.199966430664062	-0.005897481975495	0.0000127160	0.0000152588	0.5000000000
18	1.199974060058594	-0.002189719634499	0.0000063580	0.0000076294	0.5000000000
19	1.199977874755859	-0.000335796031597	0.0000031790	0.0000038147	0.5000000000
20	1.199979782104492	0.000591176378144	0.0000015895	0.0000019073	0.5000000000
21	1.199978828430176	0.000127689289244	0.0000007947	0.0000009537	0.5000000000
22	1.199978351593018	-0.000104053592183	0.0000003974	0.0000004768	0.5000000000
23	1.199978590011597	0.000011817793279	0.0000001987	0.0000002384	0.5000000000
24	1.199978470802307	-0.000046117913265	0.0000000993	0.0000001192	0.5000000000
25	1.199978530406952	-0.000017150063447	0.0000000497	0.0000000596	0.5000000000
26	1.199978560209274	-0.000002666135947	0.0000000248	0.0000000298	0.5000000000
27	1.199978575110435	0.000004575828450	0.0000000124	0.0000000149	0.5000000000
28	1.199978567659855	0.000000954846197	0.0000000062	0.0000000075	0.5000000000
29	1.199978563934565	-0.000000855644888	0.0000000031	0.0000000037	0.5000000000
30	1.199978565797210	0.000000049600651	0.0000000016	0.0000000019	0.5000000000

La convergencia con la tolerancia pedida se produjo en la iteración: 12. A continuación aparecen la gráfica de la función, los diferentes puntos de la sucesión $\{x_n\}$ sobre el eje x con un pequeño círculo y los puntos correspondientes sobre la curva con un cuadrado, ambas sucesiones de puntos se van aproximando progresivamente a la solución. También aparecen la iteración pedida, dentro de un cuadrado algo mayor, y el punto donde se ha producido la convergencia, en un círculo rojo.
Sugerencia: asignar a cada uno de los puntos obtenidos el número de iteración que le corresponde, y seguir así gráficamente la convergencia del proceso.