Raices

Question 1

Top 1 Bottom Focus Help

Obtener una raiz de la función $f(x) = 3\,x^{-1} - 2.7$ en el intervalo [1,2] por el método de bisección. Entrar también la quinta iteración resultante del proceso iterativo y dar los resultados con tres cifras decimales correctas.
You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} 1.6 & 1.11 \end{bmatrix}$$

Solution:

Dada una función continua, el metodo de bisección localiza la raíz real de $f(x)=0$ obteniendo una sucesión de intervalos de longitudes cada vez más pequeñas. Suponemos que se conoce un intervalo [a,b] en cuyos extremos la función tiene valores con signos diferentes, o sea, se verifica que $f(a).f(b) < 0 \Rightarrow$ por el teorema del valor intermedio para funciones continuas, existe una raiz de f(x), o sea, $\exists \alpha \in\,]a,b[$, tal que $f(\alpha)=0$.

La función se evalúa entonces en el punto medio $m=(a+b)/2$ y si $f(m) \neq 0$, su signo decide cuál de los subintervalos]a,m[ó]m,b[contiene la raiz. Se continúa la búsqueda de la raiz en el subintervalo en el que f(m) tiene signo contrario a f(a) ó f(b). Y así sucesivamente. El método genera por tanto una sucesión de aproximaciones $\{x_n\}$ que converge a una raiz concreta $\alpha \in\,]a,b[$ con la propiedad:

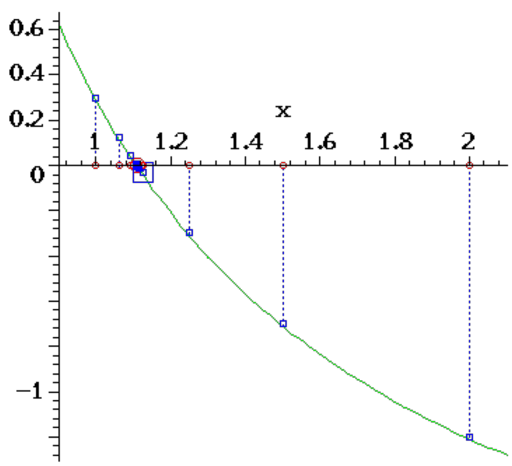
$$|x_n - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}, \qquad n=0,1,2,...$$

Terminamos las iteraciones cuando $|x_n - \alpha| < \epsilon$, o cuando $|f(x_n)| < \epsilon$, siendo ϵ la tolerancia con la cual se quiere calcular la raiz. Como en general no se conoce a priori el valor de α, en la práctica usaremos los criterios del error absoluto o error relativo: $|e_n| = |x_n - x_{n-1}| < \epsilon$, o bien $|x_n - x_{n-1}|/|x_n| < \epsilon$, respectivamente. Tiene orden de convergencia 1 (*lineal*) y constante de error asintótico 1/2 (ver tabla). Llamando x_0=a, x_1=b para arrancar el proceso, las iteraciones sucesivas son:

MÉTODO DE BISECCIÓN					
k	x_k	$f(x_k)$	$\|x_k - x_{k-1}\| / \|x_k\|$	$\|e_k\|$	$\|e_k\| / \|e_{k-1}\|$
0	1.000000000000000	0.300000000000000	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
1	2.000000000000000	-1.200000000000000	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
2	1.500000000000000	-0.700000000000000	0.3333333333	0.5000000000	0.0000000000
3	1.250000000000000	-0.300000000000000	0.2000000000	0.2500000000	0.5000000000
4	1.125000000000000	-0.033333333333333	0.1111111111	0.1250000000	0.5000000000
5	1.062500000000000	0.123529411764706	0.0588235294	0.0625000000	0.5000000000
6	1.093750000000000	0.042857142857143	0.0285714286	0.0312500000	0.5000000000
7	1.109375000000000	0.004225352112676	0.0140845070	0.0156250000	0.5000000000
8	1.117187500000000	-0.014685314685315	0.0069930070	0.0078125000	0.5000000000
9	1.113281250000000	-0.005263157894737	0.0035087719	0.0039062500	0.5000000000
10	1.111328125000000	-0.000527240773286	0.0017574692	0.0019531250	0.5000000000
11	1.110351562500000	0.001846965699208	0.0008795075	0.0009765625	0.5000000000

12	1.110839843750000	0.000659340659341	0.0004395604	0.0004882812	0.5000000000
13	1.111083984375000	0.000065919578115	0.0002197319	0.0002441406	0.5000000000
14	1.111206054687500	-0.000230693178073	0.0001098539	0.0001220703	0.5000000000
15	1.111145019531250	-0.000082394946443	0.0000549300	0.0000610352	0.5000000000
16	1.111114501953125	-0.000008239720948	0.0000274657	0.0000305176	0.5000000000
17	1.111099243164062	0.000028839419366	0.0000137331	0.0000152588	0.5000000000
18	1.111106872558594	0.000010299721908	0.0000068665	0.0000076294	0.5000000000
19	1.111110687255859	0.000001029968655	0.0000034332	0.0000038147	0.5000000000
20	1.111112594604492	-0.000003604884103	0.0000017166	0.0000019073	0.5000000000
21	1.111111640930176	-0.000001287459713	0.0000008583	0.0000009537	0.5000000000
22	1.111111164093018	-0.000000128746027	0.0000004292	0.0000004768	0.5000000000
23	1.111110925674438	0.000000450611190	0.0000002146	0.0000002384	0.5000000000
24	1.111111044883728	0.000000160932550	0.0000001073	0.0000001192	0.5000000000
25	1.111111104488373	0.000000016093254	0.0000000536	0.0000000596	0.5000000000
26	1.111111134290695	-0.000000056326388	0.0000000268	0.0000000298	0.5000000000
27	1.111111119389534	-0.000000020116567	0.0000000134	0.0000000149	0.5000000000
28	1.111111111938953	-0.000000002011657	0.0000000067	0.0000000075	0.5000000000
29	1.111111108213663	0.000000007040799	0.0000000034	0.0000000037	0.5000000000
30	1.111111110076308	0.000000002514571	0.0000000017	0.0000000019	0.5000000000

La convergencia con la tolerancia pedida se produjo en la iteración: 12. A continuación aparecen la gráfica de la función, los diferentes puntos de la sucesión $\{x_n\}$ sobre el eje x con un pequeño círculo y los puntos correspondientes sobre la curva con un cuadrado, ambas sucesiones de puntos se van aproximando progresivamente a la solución. También aparecen la iteración pedida, dentro de un cuadrado algo mayor, y el punto donde se ha producido la convergencia, en un círculo rojo.
Sugerencia: asignar a cada uno de los puntos obtenidos el número de iteración que le corresponde, y seguir así gráficamente la convergencia del proceso.



(cc) Jesús García Quesada 2011