Raices

Question 1 Top 1 Bottom Focus Help

Obtener una raiz de la función $f(x) = \cos(x) - \sin(x) + 0.2$ en el intervalo [0,1] por el método de bisección. Entrar también la séptima iteración resultante del proceso iterativo y dar los resultados con tres cifras decimales correctas.
You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} 0.922 & 0.927 \end{bmatrix}$$

Solution:

Dada una función continua, el metodo de bisección localiza la raíz real de $f(x)=0$ obteniendo una sucesión de intervalos de longitudes cada vez más pequeñas. Suponemos que se conoce un intervalo [a,b] en cuyos extremos la función tiene valores con signos diferentes, o sea, se verifica que $f(a).f(b) < 0 \Rightarrow$ por el teorema del valor intermedio para funciones continuas, existe una raiz de f(x), o sea, $\exists \alpha \in\,]a,b[$, tal que $f(\alpha)=0$.

La función se evalúa entonces en el punto medio $m=(a+b)/2$ y si $f(m) \neq 0$, su signo decide cuál de los subintervalos]a,m[ó]m,b[contiene la raiz. Se continúa la búsqueda de la raiz en el subintervalo en el que f(m) tiene signo contrario a f(a) ó f(b). Y así sucesivamente. El método genera por tanto una sucesión de aproximaciones $\{x_n\}$ que converge a una raiz concreta $\alpha \in\,]a,b[$ con la propiedad:

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}, \qquad n=0,1,2,...$$

Terminamos las iteraciones cuando $|x_n - \alpha| < \epsilon$, o cuando $|f(x_n)| < \epsilon$, siendo ϵ la tolerancia con la cual se quiere calcular la raiz. Como en general no se conoce a priori el valor de α, en la práctica usaremos los criterios del error absoluto o error relativo: $|e_n| = |x_n - x_{n-1}| < \epsilon$, o bien $|x_n - x_{n-1}|/|x_n| < \epsilon$, respectivamente. Tiene orden de convergencia 1 (*lineal*) y constante de error asintótico 1/2 (ver tabla). Llamando $x_0=a$, $x_1=b$ para arrancar el proceso, las iteraciones sucesivas son:

MÉTODO DE BISECCIÓN					
k	x_k	$f(x_k)$	$\lvert x_k - x_{k-1} \rvert / \lvert x_k \rvert$	$\lvert e_k \rvert$	$\lvert e_k \rvert / \lvert e_{k-1} \rvert$
0	0.000000000000000	1.200000000000000	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
1	1.000000000000000	-0.101168678939757	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
2	0.500000000000000	0.598157023286170	1.0000000000	0.5000000000	0.0000000000
3	0.750000000000000	0.250050108850487	0.3333333333	0.2500000000	0.5000000000
4	0.875000000000000	0.073453355927298	0.1428571429	0.1250000000	0.5000000000
5	0.937500000000000	-0.014276033168215	0.0666666667	0.0625000000	0.5000000000
6	0.906250000000000	0.029505418846963	0.0344827586	0.0312500000	0.5000000000
7	0.921875000000000	0.007591205915601	0.0169491525	0.0156250000	0.5000000000
8	0.929687500000000	-0.003348619302120	0.0084033613	0.0078125000	0.5000000000
9	0.925781250000000	0.002119783602419	0.0042194093	0.0039062500	0.5000000000
10	0.927734375000000	-0.000614800492094	0.0021052632	0.0019531250	0.5000000000
11	0.926757812500000	0.000752396546509	0.0010537408	0.0009765625	0.5000000000

12	0.927246093750000	0.000068774193549	0.0005265929	0.0004882812	0.5000000000
13	0.927490234375000	-0.000273019117874	0.0002632272	0.0002441406	0.5000000000
14	0.927368164062500	-0.000102123953040	0.0001316309	0.0001220703	0.5000000000
15	0.927307128906250	-0.000016675252306	0.0000658198	0.0000610352	0.5000000000
16	0.927276611328125	0.000026049377501	0.0000329110	0.0000305176	0.5000000000
17	0.927291870117188	0.000004687039315	0.0000164552	0.0000152588	0.5000000000
18	0.927299499511719	-0.000005994112316	0.0000082275	0.0000076294	0.5000000000
19	0.927295684814453	-0.000000653537955	0.0000041138	0.0000038147	0.5000000000
20	0.927293777465820	0.000002016750316	0.0000020569	0.0000019073	0.5000000000
21	0.927294731140137	0.000000681606089	0.0000010284	0.0000009537	0.5000000000
22	0.927295207977295	0.000000014034044	0.0000005142	0.0000004768	0.5000000000
23	0.927295446395874	-0.000000319751961	0.0000002571	0.0000002384	0.5000000000
24	0.927295327186584	-0.000000152858960	0.0000001286	0.0000001192	0.5000000000
25	0.927295267581940	-0.000000069412458	0.0000000643	0.0000000596	0.5000000000
26	0.927295237779617	-0.000000027689207	0.0000000321	0.0000000298	0.5000000000
27	0.927295222878456	-0.000000006827581	0.0000000161	0.0000000149	0.5000000000
28	0.927295215427876	0.000000003603231	0.0000000080	0.0000000075	0.5000000000
29	0.927295219153166	-0.000000001612175	0.0000000040	0.0000000037	0.5000000000
30	0.927295217290521	0.000000000995528	0.0000000020	0.0000000019	0.5000000000

La convergencia con la tolerancia pedida se produjo en la iteración: 13. A continuación aparecen la gráfica de la función, los diferentes puntos de la sucesión $\{x_n\}$ sobre el eje x con un pequeño círculo y los puntos correspondientes sobre la curva con un cuadrado, ambas sucesiones de puntos se van aproximando progresivamente a la solución. También aparecen la iteración pedida, dentro de un cuadrado algo mayor, y el punto donde se ha producido la convergencia, en un círculo rojo.
Sugerencia: asignar a cada uno de los puntos obtenidos el número de iteración que le corresponde, y seguir así gráficamente la convergencia del proceso.