Raices

Question 1 Top 1 Bottom Focus Help

Obtener una raiz de la función $f(x) = 1/6\ [(6^{1/7})/(x^{6/7})]-0.1$ en el intervalo [2,3] por el método de bisección. Entrar también la séptima iteración resultante del proceso iterativo y dar los resultados con tres cifras decimales correctas.
You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} 2.45 & 2.45 \end{bmatrix}$$

Solution:

Dada una función continua, el metodo de bisección localiza la raíz real de f(x)=0 obteniendo una sucesión de intervalos de longitudes cada vez más pequeñas. Suponemos que se conoce un intervalo [a,b] en cuyos extremos la función tiene valores con signos diferentes, o sea, se verifica que $f(a).f(b) < 0 \Rightarrow$ por el teorema del valor intermedio para funciones continuas, existe una raiz de f(x), o sea, $\exists\alpha \in\ ]a,b[$, tal que $f(\alpha)=0$.

La función se evalúa entonces en el punto medio $m=(a+b)/2$ y si $f(m) \neq 0$, su signo decide cuál de los subintervalos]a,m[ó]m,b[contiene la raiz. Se continúa la búsqueda de la raiz en el subintervalo en el que f(m) tiene signo contrario a f(a) ó f(b). Y así sucesivamente. El método genera por tanto una sucesión de aproximaciones $\{x_n\}$ que converge a una raiz concreta $\alpha \in\ ]a,b[$ con la propiedad:

$$|x_n - \alpha| \le \frac{b-a}{2^{n+1}}, \qquad n=0,1,2,...$$

Terminamos las iteraciones cuando $|x_n - \alpha| < \epsilon$, o cuando $|f(x_n)| < \epsilon$, siendo ϵ la tolerancia con la cual se quiere calcular la raiz. Como en general no se conoce a priori el valor de α, en la práctica usaremos los criterios del error absoluto o error relativo: $|e_n| = |x_n-x_{n-1}| < \epsilon$, o bien $|x_n-x_{n-1}|/|x_n| < \epsilon$, respectivamente. Tiene orden de convergencia 1 (*lineal*) y constante de error asintótico 1/2 (ver tabla). Llamando x_0=a, x_1=b para arrancar el proceso, las iteraciones sucesivas son:

MÉTODO DE BISECCIÓN					
k	x_k	$f(x_k)$	$\lvert x_k - x_{k-1}\rvert / \lvert x_k\rvert$	$\lvert e_k\rvert$	$\lvert e_k\rvert / \lvert e_{k-1}\rvert$
0	2.000000000000000	0.018846802935615	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
1	3.000000000000000	-0.016043922749478	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
2	2.500000000000000	-0.001842886654644	0.2000000000	0.5000000000	0.0000000000
3	2.250000000000000	0.007434182660663	0.1111111111	0.2500000000	0.5000000000
4	2.375000000000000	0.002568931319239	0.0526315789	0.1250000000	0.5000000000
5	2.437500000000000	0.000310499514946	0.0256410256	0.0625000000	0.5000000000
6	2.468750000000000	-0.000778849163330	0.0126582278	0.0312500000	0.5000000000
7	2.453125000000000	-0.000237396287422	0.0063694268	0.0156250000	0.5000000000
8	2.445312500000000	0.000035738897205	0.0031948882	0.0078125000	0.5000000000
9	2.449218750000000	-0.000101030948339	0.0015948963	0.0039062500	0.5000000000
10	2.447265625000000	-0.000032696704168	0.0007980846	0.0019531250	0.5000000000
11	2.446289062500000	0.000001508412418	0.0003992016	0.0009765625	0.5000000000

12	2.446777343750000	-0.000015597315092	0.0001995610	0.0004882812	0.5000000000
13	2.446533203125000	-0.000007045243867	0.0000997904	0.0002441406	0.5000000000
14	2.446411132812500	-0.000002768613885	0.0000498977	0.0001220703	0.5000000000
15	2.446350097656250	-0.000000630150277	0.0000249495	0.0000610352	0.5000000000
16	2.446319580078125	0.000000439118684	0.0000124749	0.0000305176	0.5000000000
17	2.446334838867188	-0.000000095518893	0.0000062374	0.0000152588	0.5000000000
18	2.446327209472656	0.000000171799121	0.0000031187	0.0000076294	0.5000000000
19	2.446331024169922	0.000000038139921	0.0000015594	0.0000038147	0.5000000000
20	2.446332931518555	-0.000000028689535	0.0000007797	0.0000019073	0.5000000000
21	2.446331977844238	0.000000004725181	0.0000003898	0.0000009537	0.5000000000
22	2.446332454681396	-0.000000011982180	0.0000001949	0.0000004768	0.5000000000
23	2.446332216262817	-0.000000003628500	0.0000000975	0.0000002384	0.5000000000
24	2.446332097053528	0.000000000548340	0.0000000487	0.0000001192	0.5000000000
25	2.446332156658173	-0.000000001540080	0.0000000244	0.0000000596	0.5000000000
26	2.446332126855850	-0.000000000495870	0.0000000122	0.0000000298	0.5000000000
27	2.446332111954689	0.000000000026235	0.0000000061	0.0000000149	0.5000000000
28	2.446332119405270	-0.000000000234818	0.0000000030	0.0000000075	0.5000000000
29	2.446332115679979	-0.000000000104291	0.0000000015	0.0000000037	0.5000000000
30	2.446332113817334	-0.000000000039028	0.0000000008	0.0000000019	0.5000000000

La convergencia con la tolerancia pedida se produjo en la iteración: 11. A continuación aparecen la gráfica de la función, los diferentes puntos de la sucesión $\{x_n\}$ sobre el eje x con un pequeño círculo y los puntos correspondientes sobre la curva con un cuadrado, ambas sucesiones de puntos se van aproximando progresivamente a la solución. También aparecen la iteración pedida, dentro de un cuadrado algo mayor, y el punto donde se ha producido la convergencia, en un círculo rojo.
Sugerencia: asignar a cada uno de los puntos obtenidos el número de iteración que le corresponde, y seguir así gráficamente la convergencia del proceso.