Raices

Question 1 Top 1 Bottom Focus Help

Obtener una raiz de la función $f(x) = 6\ x^{-1} - 1.4$ en el intervalo [4,5] por el método de bisección. Entrar también la octava iteración resultante del proceso iterativo y dar los resultados con tres cifras decimales correctas.
You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} 4.29 & 4.29 \end{bmatrix}$$

Solution:

Dada una función continua, el metodo de bisección localiza la raíz real de f(x)=0 obteniendo una sucesión de intervalos de longitudes cada vez más pequeñas. Suponemos que se conoce un intervalo [a,b] en cuyos extremos la función tiene valores con signos diferentes, o sea, se verifica que $f(a).f(b) < 0 \Rightarrow$ por el teorema del valor intermedio para funciones continuas, existe una raiz de f(x), o sea, $\exists \alpha \in\ ]a,b[$, tal que $f(\alpha)=0$.

La función se evalúa entonces en el punto medio $m=(a+b)/2$ y si $f(m) \neq 0$, su signo decide cuál de los subintervalos]a,m[ó]m,b[contiene la raiz. Se continúa la búsqueda de la raiz en el subintervalo en el que f(m) tiene signo contrario a f(a) ó f(b). Y así sucesivamente. El método genera por tanto una sucesión de aproximaciones $\{x_n\}$ que converge a una raiz concreta $\alpha \in\ ]a,b[$ con la propiedad:

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}, \qquad n=0,1,2,\ldots$$

Terminamos las iteraciones cuando $|x_n - \alpha| < \epsilon$, o cuando $|f(x_n)| < \epsilon$, siendo ϵ la tolerancia con la cual se quiere calcular la raiz. Como en general no se conoce a priori el valor de α, en la práctica usaremos los criterios del error absoluto o error relativo: $|e_n| = |x_n - x_{n-1}| < \epsilon$, o bien $|x_n - x_{n-1}|/|x_n| < \epsilon$, respectivamente. Tiene orden de convergencia 1 (*lineal*) y constante de error asintótico 1/2 (ver tabla). Llamando x_0=a, x_1=b para arrancar el proceso, las iteraciones sucesivas son:

MÉTODO DE BISECCIÓN					
k	x_k	$f(x_k)$	$\lvert x_k - x_{k-1} \rvert / \lvert x_k \rvert$	$\lvert e_k \rvert$	$\lvert e_k \rvert / \lvert e_{k-1} \rvert$
0	4.000000000000000	0.100000000000000	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
1	5.000000000000000	-0.200000000000000	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
2	4.500000000000000	-0.066666666666667	0.1111111111	0.5000000000	0.0000000000
3	4.250000000000000	0.011764705882353	0.0588235294	0.2500000000	0.5000000000
4	4.375000000000000	-0.028571428571429	0.0285714286	0.1250000000	0.5000000000
5	4.312500000000000	-0.008695652173913	0.0144927536	0.0625000000	0.5000000000
6	4.281250000000000	0.001459854014599	0.0072992701	0.0312500000	0.5000000000
7	4.296875000000000	-0.003636363636364	0.0036363636	0.0156250000	0.5000000000
8	4.289062500000000	-0.001092896174863	0.0018214936	0.0078125000	0.5000000000
9	4.285156250000000	0.000182315405652	0.0009115770	0.0039062500	0.5000000000
10	4.287109375000000	-0.000455580865604	0.0004555809	0.0019531250	0.5000000000
11	4.286132812500000	-0.000136705399863	0.0002278423	0.0009765625	0.5000000000

12	4.285644531250000	0.000022786829213	0.0001139341	0.0004882812	0.5000000000
13	4.285888671875000	-0.000056963827969	0.0000569638	0.0002441406	0.5000000000
14	4.285766601562500	-0.000017089635136	0.0000284827	0.0001220703	0.5000000000
15	4.285705566406250	0.000002848313087	0.0000142416	0.0000610352	0.5000000000
16	4.285736083984375	-0.000007120732011	0.0000071207	0.0000305176	0.5000000000
17	4.285720825195312	-0.000002136227209	0.0000035604	0.0000152588	0.5000000000
18	4.285713195800781	0.000000356038502	0.0000017802	0.0000076294	0.5000000000
19	4.285717010498047	-0.000000890095463	0.0000008901	0.0000038147	0.5000000000
20	4.285715103149414	-0.000000267028758	0.0000004450	0.0000019073	0.5000000000
21	4.285714149475098	0.000000044504803	0.0000002225	0.0000009537	0.5000000000
22	4.285714626312256	-0.000000111261995	0.0000001113	0.0000004768	0.5000000000
23	4.285714387893677	-0.000000033378600	0.0000000556	0.0000002384	0.5000000000
24	4.285714268684387	0.000000005563100	0.0000000278	0.0000001192	0.5000000000
25	4.285714328289032	-0.000000013907750	0.0000000139	0.0000000596	0.5000000000
26	4.285714298486710	-0.000000004172325	0.0000000070	0.0000000298	0.5000000000
27	4.285714283585548	0.000000000695388	0.0000000035	0.0000000149	0.5000000000
28	4.285714291036129	-0.000000001738469	0.0000000017	0.0000000075	0.5000000000
29	4.285714287310839	-0.000000000521541	0.0000000009	0.0000000037	0.5000000000
30	4.285714285448194	0.000000000086923	0.0000000004	0.0000000019	0.5000000000

La convergencia con la tolerancia pedida se produjo en la iteración: 10. A continuación aparecen la gráfica de la función, los diferentes puntos de la sucesión $\{x_n\}$ sobre el eje x con un pequeño círculo y los puntos correspondientes sobre la curva con un cuadrado, ambas sucesiones de puntos se van aproximando progresivamente a la solución. También aparecen la iteración pedida, dentro de un cuadrado algo mayor, y el punto donde se ha producido la convergencia, en un círculo rojo.
Sugerencia: asignar a cada uno de los puntos obtenidos el número de iteración que le corresponde, y seguir así gráficamente la convergencia del proceso.