Raices

Question 1 Top 1 Bottom Focus Help

Obtener una raiz de la función $f(x) = \ln(5x) - 1.9$ en el intervalo [1,2] por el método de bisección. Entrar también la octava iteración resultante del proceso iterativo y dar los resultados con tres cifras decimales correctas.
You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} 1.34 & 1.34 \end{bmatrix}$$

Solution:

Dada una función continua, el metodo de bisección localiza la raíz real de $f(x)=0$ obteniendo una sucesión de intervalos de longitudes cada vez más pequeñas. Suponemos que se conoce un intervalo [a,b] en cuyos extremos la función tiene valores con signos diferentes, o sea, se verifica que $f(a).f(b) < 0 \Rightarrow$ por el teorema del valor intermedio para funciones continuas, existe una raiz de f(x), o sea, $\exists \alpha \in]a,b[$, tal que $f(\alpha)=0$.

La función se evalúa entonces en el punto medio $m=(a+b)/2$ y si $f(m) \neq 0$, su signo decide cuál de los subintervalos]a,m[ó]m,b[contiene la raiz. Se continúa la búsqueda de la raiz en el subintervalo en el que f(m) tiene signo contrario a f(a) ó f(b). Y así sucesivamente. El método genera por tanto una sucesión de aproximaciones $\{x_n\}$ que converge a una raiz concreta $\alpha \in]a,b[$ con la propiedad:

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}, \quad n=0,1,2,\ldots$$

Terminamos las iteraciones cuando $|x_n - \alpha| < \epsilon$, o cuando $|f(x_n)| < \epsilon$, siendo ϵ la tolerancia con la cual se quiere calcular la raiz. Como en general no se conoce a priori el valor de α, en la práctica usaremos los criterios del error absoluto o error relativo: $|e_n| = |x_n - x_{n-1}| < \epsilon$, o bien $|x_n - x_{n-1}|/|x_n| < \epsilon$, respectivamente. Tiene orden de convergencia 1 (*lineal*) y constante de error asintótico 1/2 (ver tabla). Llamando $x_0=a$, $x_1=b$ para arrancar el proceso, las iteraciones sucesivas son:

MÉTODO DE BISECCIÓN					
k	x_k	$f(x_k)$	$\lvert x_k - x_{k-1} \rvert / \lvert x_k \rvert$	$\lvert e_k \rvert$	$\lvert e_k \rvert / \lvert e_{k-1} \rvert$
0	1.000000000000000	-0.290562087565900	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
1	2.000000000000000	0.402585092994046	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
2	1.500000000000000	0.114903020542265	0.3333333333	0.5000000000	0.0000000000
3	1.250000000000000	-0.067418536251690	0.2000000000	0.2500000000	0.5000000000
4	1.375000000000000	0.027891643552635	0.0909090909	0.1250000000	0.5000000000
5	1.312500000000000	-0.018628372082258	0.0476190476	0.0625000000	0.5000000000
6	1.343750000000000	0.004902125327936	0.0232558140	0.0312500000	0.5000000000
7	1.328125000000000	-0.006793914435255	0.0117647059	0.0156250000	0.5000000000
8	1.335937500000000	-0.000928794982857	0.0058479532	0.0078125000	0.5000000000
9	1.339843750000000	0.001990915120478	0.0029154519	0.0039062500	0.5000000000
10	1.337890625000000	0.000532125656818	0.0014598540	0.0019531250	0.5000000000
11	1.336914062500000	-0.000198067876904	0.0007304602	0.0009765625	0.5000000000

12	1.337402343750000	0.000167095537780	0.0003650968	0.0004882812	0.5000000000
13	1.337158203125000	-0.000015469501522	0.0001825817	0.0002441406	0.5000000000
14	1.337280273437500	0.000075817184378	0.0000912825	0.0001220703	0.5000000000
15	1.337219238281250	0.000030174883085	0.0000456433	0.0000610352	0.5000000000
16	1.337188720703125	0.000007352951208	0.0000228222	0.0000305176	0.5000000000
17	1.337173461914062	-0.000004058210049	0.0000114112	0.0000152588	0.5000000000
18	1.337181091308594	0.000001647386856	0.0000057056	0.0000076294	0.5000000000
19	1.337177276611328	-0.000001205407527	0.0000028528	0.0000038147	0.5000000000
20	1.337179183959961	0.000000220990682	0.0000014264	0.0000019073	0.5000000000
21	1.337178230285645	-0.000000492208168	0.0000007132	0.0000009537	0.5000000000
22	1.337178707122803	-0.000000135608680	0.0000003566	0.0000004768	0.5000000000
23	1.337178945541382	0.000000042691017	0.0000001783	0.0000002384	0.5000000000
24	1.337178826332092	-0.000000046458827	0.0000000891	0.0000001192	0.5000000000
25	1.337178885936737	-0.000000001883904	0.0000000446	0.0000000596	0.5000000000
26	1.337178915739059	0.000000020403557	0.0000000223	0.0000000298	0.5000000000
27	1.337178900837898	0.000000009259826	0.0000000111	0.0000000149	0.5000000000
28	1.337178893387318	0.000000003687961	0.0000000056	0.0000000075	0.5000000000
29	1.337178889662027	0.000000000902029	0.0000000028	0.0000000037	0.5000000000
30	1.337178887799382	-0.000000000490938	0.0000000014	0.0000000019	0.5000000000

La convergencia con la tolerancia pedida se produjo en la iteración: 12. A continuación aparecen la gráfica de la función, los diferentes puntos de la sucesión $\{x_n\}$ sobre el eje x con un pequeño círculo y los puntos correspondientes sobre la curva con un cuadrado, ambas sucesiones de puntos se van aproximando progresivamente a la solución. También aparecen la iteración pedida, dentro de un cuadrado algo mayor, y el punto donde se ha producido la convergencia, en un círculo rojo.
Sugerencia: asignar a cada uno de los puntos obtenidos el número de iteración que le corresponde, y seguir así gráficamente la convergencia del proceso.