Raices

Question 1 Top 1 Bottom Focus Help

Obtener una raiz de la función $f(x) = 4^x - 7$ en el intervalo [1,2] por el método de bisección. Entrar también la quinta iteración resultante del proceso iterativo y dar los resultados con tres cifras decimales correctas.
You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} 1.44 & 1.40 \end{bmatrix}$$

Solution:

Dada una función continua, el metodo de bisección localiza la raíz real de $f(x)=0$ obteniendo una sucesión de intervalos de longitudes cada vez más pequeñas. Suponemos que se conoce un intervalo [a,b] en cuyos extremos la función tiene valores con signos diferentes, o sea, se verifica que $f(a).f(b) < 0 \Rightarrow$ por el teorema del valor intermedio para funciones continuas, existe una raiz de f(x), o sea, $\exists \alpha \in]a,b[$, tal que $f(\alpha)=0$.

La función se evalúa entonces en el punto medio $m=(a+b)/2$ y si $f(m) \neq 0$, su signo decide cuál de los subintervalos $]a,m[$ ó $]m,b[$ contiene la raiz. Se continúa la búsqueda de la raiz en el subintervalo en el que f(m) tiene signo contrario a f(a) ó f(b). Y así sucesivamente. El método genera por tanto una sucesión de aproximaciones $\{x_n\}$ que converge a una raiz concreta $\alpha \in]a,b[$ con la propiedad:

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}, \qquad n=0,1,2,\ldots$$

Terminamos las iteraciones cuando $|x_n - \alpha| < \epsilon$, o cuando $|f(x_n)| < \epsilon$, siendo ϵ la tolerancia con la cual se quiere calcular la raiz. Como en general no se conoce a priori el valor de α, en la práctica usaremos los criterios del error absoluto o error relativo: $|e_n| = |x_n - x_{n-1}| < \epsilon$, o bien $|x_n - x_{n-1}|/|x_n| < \epsilon$, respectivamente. Tiene orden de convergencia 1 (*lineal*) y constante de error asintótico 1/2 (ver tabla). Llamando x_0=a, x_1=b para arrancar el proceso, las iteraciones sucesivas son:

MÉTODO DE BISECCIÓN					
k	x_k	$f(x_k)$	$\lvert x_k - x_{k-1}\rvert / \lvert x_k\rvert$	$\lvert e_k\rvert$	$\lvert e_k\rvert / \lvert e_{k-1}\rvert$
0	1.000000000000000	-3.000000000000000	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
1	2.000000000000000	9.000000000000000	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
2	1.500000000000000	1.000000000000000	0.3333333333	0.5000000000	0.0000000000
3	1.250000000000000	-1.343145750507620	0.2000000000	0.2500000000	0.5000000000
4	1.375000000000000	-0.272828677970284	0.0909090909	0.1250000000	0.5000000000
5	1.437500000000000	0.336032345637370	0.0434782609	0.0625000000	0.5000000000
6	1.406250000000000	0.025008641493198	0.0222222222	0.0312500000	0.5000000000
7	1.390625000000000	-0.125522807510088	0.0112359551	0.0156250000	0.5000000000
8	1.398437500000000	-0.050664658905175	0.0055865922	0.0078125000	0.5000000000
9	1.402343750000000	-0.012930455203324	0.0027855153	0.0039062500	0.5000000000
10	1.404296875000000	0.006013412127513	0.0013908206	0.0019531250	0.5000000000
11	1.403320312500000	-0.003464933103445	0.0006958942	0.0009765625	0.5000000000
12	1.403808593750000	0.001272635535466	0.0003478261	0.0004882812	0.5000000000

13	1.403564453125000	-0.001096549642426	0.0001739433	0.0002441406	0.5000000000
14	1.403686523437500	0.000087942714951	0.0000869641	0.0001220703	0.5000000000
15	1.403625488281250	-0.000504328519509	0.0000434839	0.0000610352	0.5000000000
16	1.403656005859375	-0.000208199166487	0.0000217415	0.0000305176	0.5000000000
17	1.403671264648438	-0.000060129791853	0.0000108706	0.0000152588	0.5000000000
18	1.403678894042969	0.000013906070024	0.0000054353	0.0000076294	0.5000000000
19	1.403675079345703	-0.000023111958796	0.0000027176	0.0000038147	0.5000000000
20	1.403676986694336	-0.000004602968856	0.0000013588	0.0000019073	0.5000000000
21	1.403677940368652	0.000004651544466	0.0000006794	0.0000009537	0.5000000000
22	1.403677463531494	0.000000024286276	0.0000003397	0.0000004768	0.5000000000
23	1.403677225112915	-0.000002289341673	0.0000001699	0.0000002384	0.5000000000
24	1.403677344322205	-0.000001132527794	0.0000000849	0.0000001192	0.5000000000
25	1.403677403926849	-0.000000554120783	0.0000000425	0.0000000596	0.5000000000
26	1.403677433729172	-0.000000264917260	0.0000000212	0.0000000298	0.5000000000
27	1.403677448630333	-0.000000120315494	0.0000000106	0.0000000149	0.5000000000
28	1.403677456080914	-0.000000048014609	0.0000000053	0.0000000075	0.5000000000
29	1.403677459806204	-0.000000011864167	0.0000000027	0.0000000037	0.5000000000
30	1.403677461668849	0.000000006211054	0.0000000013	0.0000000019	0.5000000000

La convergencia con la tolerancia pedida se produjo en la iteración: 12. A continuación aparecen la gráfica de la función, los diferentes puntos de la sucesión $\{x_n\}$ sobre el eje x con un pequeño círculo y los puntos correspondientes sobre la curva con un cuadrado, ambas sucesiones de puntos se van aproximando progresivamente a la solución. También aparecen la iteración pedida, dentro de un cuadrado algo mayor, y el punto donde se ha producido la convergencia, en un círculo rojo.
Sugerencia: asignar a cada uno de los puntos obtenidos el número de iteración que le corresponde, y seguir así gráficamente la convergencia del proceso.