Raices

Question 1

Top 1 Bottom Focus Help

Calcular el vector $\mathbf{x}^{(k)}$ de la iteración k-ésima cuando k=4 si se utiliza el método de Newton-Raphson en la resolución del sistema no lineal:
$x_1^2+x_2^2-2\,x_3^2-x_4-1=0$, $x_1+x_2^2-4\,x_3^2-4\,x_4+4=0$, $3\,x_1-x_2^4+2\,x_3^2+x_4+5=0$, $x_1^3-2\,x_2^2+4\,x_3^2+2\,x_4+1=0$, tomando $\mathbf{x}^{(0)} = [1,1,1,1]^T$.
Calcular en cada iteración k el valor de la estimación del error absoluto $||\mathbf{e}^{(k)}|| = ||\,\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\,||_\infty$
y también del error relativo $||\,\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\,||_\infty \,/\, ||\,\mathbf{x}^{(k)}\,||_\infty$. Dar los resultados con cuatro decimales exactos.
You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} 0.618\ 2.6\ 1.22\ 0.921\ 0.943 \end{bmatrix}$$

Solution:

Queremos resolver un sistema de ecuaciones del tipo:

$$f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n) = 0,\quad f_2(x_1,x_2,\ldots,x_n) = 0\ ,\ \ldots\quad f_n(x_1,x_2,\ldots,x_n) = 0$$

donde las funciones $f_i(\mathbf{x})$, $i=1,2,\ldots,n$ son arbitrarias. Llamando entonces a $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}),f_2(\mathbf{x}),\ldots,f_n(\mathbf{x})]^T$ queremos resolver $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, con $\mathbf{F}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Si se usa el método de Newton-Raphson, esto se traduce en usar el esquema iterativo:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - (J(\mathbf{x}^{(k)}))^{-1}\,\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}),\quad k=0,1,2,\ldots$$

siendo:

$$J(\mathbf{x}^{(k)}) = \left[\frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}\right]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(k)}},\quad 1 \le i, j \le n,\quad \text{la matriz de Jacobi.}$$

Por tanto, al resolver el sistema por Newton-Raphson, debemos resolver en cada iteración el sistema lineal:

$$J(\mathbf{x}^{(k)})\,\mathbf{vc}^{(k)} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})$$

y obtener luego la siguiente iteración usando este vector de corrección recién calculado:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{vc}^{(k)}$$

En nuestro caso la función es:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1^2+x_2^2-2\,x_3^2-x_4-1 \\ x_1+x_2^2-4\,x_3^2-4\,x_4+4 \\ 3\,x_1-x_2^4+2\,x_3^2+x_4+5 \\ x_1^3-2\,x_2^2+4\,x_3^2+2\,x_4+1 \end{bmatrix}$$

y la matriz de Jacobi:

$$J(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2\,x_1 & 2\,x_2 & -4\,x_3 & -1 \\ 1 & 2\,x_2 & -8\,x_3 & -4 \\ 3 & -4\,x_2^3 & 4\,x_3 & 1 \\ 3\,x_1^2 & -4\,x_2 & 8\,x_3 & 2 \end{bmatrix}$$

Como la aproximación inicial es $\mathbf{x}^{(0)} = [1,1,1,1]^T$, calculamos:

$$J(\mathbf{x}^0) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 & -1 \\ 1 & 2 & -8 & -4 \\ 3 & -4 & 4 & 1 \\ 3 & -4 & 8 & 2 \end{bmatrix},\quad \mathbf{F}(\mathbf{x}^0) = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 10 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Y por tanto, el sistema lineal a resolver es:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 & -1 \\ 1 & 2 & -8 & -4 \\ 3 & -4 & 4 & 1 \\ 3 & -4 & 8 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{vc}^{(0)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -10 \\ -6 \end{bmatrix}$$

Una vez resuelto es $\mathbf{vc}^{(0)} = [-2/7,23/7,41/28,-13/7]^T$, por lo que entonces:

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{vc}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2/7 \\ 23/7 \\ 41/28 \\ -13/7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/7 \\ 30/7 \\ 69/28 \\ -6/7 \end{bmatrix}$$

Con $\mathbf{x}^{(1)}$ continuaríamos el proceso y obtendríamos $\mathbf{x}^{(2)}$, etc., comprobando la convergencia con cada $\mathbf{x}^{(k)}$ calculado (es $\mathbf{e}^{(k)}=\mathbf{vc}^{(k-1)}$). Las iteraciones son:

NEWTON-RAPHSON SISTEMAS						
Iter.	$\mathbf{x}^{(k)}$				Estimación errores	
k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$x_4^{(k)}$	$\|\| \mathbf{e}^{(k)} \|\|_\infty$	$\|\| \mathbf{e}^{(k)} \|\|_\infty / \|\| \mathbf{x}^{(k)} \|\|_\infty$
0	1	1	1	1	0	0
1	.71428571428571428567	4.2857142857142857143	2.4642857142857142856	-.8571428571428571427	3.285714286	0.7666666667
2	.62657807308970100234	3.2647213900236093535	2.3359611659559717543	-1.8796080455212114126	1.022465188	0.3131860475
3	.61811069710459546567	2.5357244113316020882	1.7354788302184480589	-.221646365072206094e-1	1.857443409	0.7325099686
4	.61803399501721974567	2.0589269819887039072	1.2239353217466004585	.92112872012831693885	0.9432933566	0.4581480377
5	.61803398874989489004	1.8155286744400942940	.87960179403371936034	1.3086001673265031082	0.3874714472	0.2134207257
6	.61803398874989484817	1.7499145444337177201	.73588901988612291752	1.3981031337427562013	0.1437127741	0.08212559556
7	.61803398874989484817	1.7455204768086397454	.71621328455253081002	1.4036397695608586299	0.01967573533	0.01127213092
8	.61803398874989484820	1.7455016464985081118	.71591870978327055547	1.4036629843376311744	0.0002945747693	0.0001687622408
9	.61803398874989484820	1.7455016461539116799	.71591864873541797506	1.4036629847618345238	6.104785258e-08	3.497438843e-08
10	.61803398874989484823	1.7455016461539116798	.71591864873541537206	1.4036629847618345239	2.60300e-15	1.491261842e-15
11	.61803398874989484823	1.7455016461539116798	.71591864873541537211	1.4036629847618345239	5e-20	2.864506035e-20

Mark summary:

Question	Value	Your mark
1	3.00	-
Total	3.00	0.00

New Version Click here to see a new version of this quiz.
New Quiz Click here to select a new quiz.

If you have technical problems, you can send email to the administrator.
Mathematical questions can be sent to the teacher.