Raices

Question 1 Top 1 Bottom Focus Help

Calcular el vector $\mathbf{x}^{(k)}$ de la iteración k-ésima cuando k=4 si se utiliza el método de Newton-Raphson en la resolución del sistema no lineal: $4\,x_1-x_2+x_3-x_1x_4=0$, $-x_1+3\,x_2-2\,x_3-x_2x_4=0$, $x_1-2\,x_2+3\,x_3-x_3x_4=0$, $x_1^2+x_2^2+x_3^2-1=0$, tomando $\mathbf{x}^{(0)} = [1,1,1,1]^T$.
Calcular en cada iteración k el valor de la estimación del error absoluto $||\mathbf{e}^{(k)}|| = ||\, \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\,||_\infty$
y también del error relativo $||\,\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\,||_\infty \,/\, ||\,\mathbf{x}^{(k)}\,||_\infty$. Dar los resultados con cuatro decimales exactos.
You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} 0.0\ 0.707\ 0.707\ 1\ 0.00123 \end{bmatrix}$$

Solution:

Queremos resolver un sistema de ecuaciones del tipo:

$$f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n) = 0,\quad f_2(x_1,x_2,\ldots,x_n) = 0\ ,\ \ldots\quad f_n(x_1,x_2,\ldots,x_n) = 0$$

donde las funciones $f_i(\mathbf{x})$, $i=1,2,\ldots,n$ son arbitrarias. Llamando entonces a $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}),f_2(\mathbf{x}),\ldots,f_n(\mathbf{x})]^T$ queremos resolver $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, con $\mathbf{F}:\mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n$. Si se usa el método de Newton-Raphson, esto se traduce en usar el esquema iterativo:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - (J(\mathbf{x}^{(k)}))^{-1}\,\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}),\quad k=0,1,2,\ldots$$

siendo:

$$J(\mathbf{x}^{(k)}) = \left[\frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}\right]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(k)}},\quad 1 \le i, j \le n,\quad \text{la matriz de Jacobi.}$$

Por tanto, al resolver el sistema por Newton-Raphson, debemos resolver en cada iteración el sistema lineal:

$$J(\mathbf{x}^{(k)})\,\mathbf{vc}^{(k)} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})$$

y obtener luego la siguiente iteración usando este vector de corrección recién calculado:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{vc}^{(k)}$$

En nuestro caso la función es:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 4\,x_1-x_2+x_3-x_1x_4 \\ -x_1+3\,x_2-2\,x_3-x_2x_4 \\ x_1-2\,x_2+3\,x_3-x_3x_4 \\ x_1^2+x_2^2+x_3^2-1 \end{bmatrix}$$

y la matriz de Jacobi:

$$J(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 4-x_4 & -1 & 1 & -x_1 \\ -1 & 3-x_4 & -2 & -x_2 \\ 1 & -2 & 3-x_4 & -x_3 \\ 2\,x_1 & 2\,x_2 & 2\,x_3 & 0 \end{bmatrix}$$

Como la aproximación inicial es $\mathbf{x}^{(0)} = [1,1,1,1]^T$, calculamos:

$$J(\mathbf{x}^0) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix},\quad \mathbf{F}(\mathbf{x}^0) = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Y por tanto, el sistema lineal a resolver es:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}\ \mathbf{vc}^{(0)} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Una vez resuelto es $\mathbf{vc}^{(0)} = [-1,0,0,0]^T$, por lo que entonces:

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{vc}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Con $\mathbf{x}^{(1)}$ continuaríamos el proceso y obtendríamos $\mathbf{x}^{(2)}$, etc., comprobando la convergencia con cada $\mathbf{x}^{(k)}$ calculado (es $\mathbf{e}^{(k)}=\mathbf{vc}^{(k-1)}$). Las iteraciones son:

NEWTON-RAPHSON SISTEMAS						
Iter.	$\mathbf{x}^{(k)}$				Estimación errores	
k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$x_4^{(k)}$	$\|\| \mathbf{e}^{(k)} \|\|_\infty$	$\|\| \mathbf{e}^{(k)} \|\|_\infty / \|\| \mathbf{x}^{(k)} \|\|_\infty$
0	1	1	1	1	0	0
1	0	1.0000000000000000000	1.0000000000000000000	1.	1	1
2	0	.75000000000000000000	.75000000000000000000	1.0000000000000000000	0.25	0.25
3	0	.70833333333333333333	.70833333333333333333	1.0000000000000000000	0.04166666667	0.04166666667
4	0	.70710784313725490197	.70710784313725490197	.99999999999999999996	0.001225490196	0.001225490196
5	0	.70710678118734495532	.70710678118734495532	1.0000000000000000000	1.061949910e-06	1.061949910e-06
6	0	.70710678118654752442	.70710678118654752442	1.0000000000000000001	7.9743090e-13	7.974309000e-13
7	0	.70710678118654752438	.70710678118654752438	1.0000000000000000001	4e-20	4.000000000e-20

Mark summary:

Question	Value	Your mark
1	3.00	-
Total	3.00	0.00

New Version Click here to see a new version of this quiz.
New Quiz Click here to select a new quiz.

If you have technical problems, you can send email to the administrator.
Mathematical questions can be sent to the teacher.