Raices

Question 1 Top 1 Bottom Focus Help

Calcular el vector $\mathbf{x}^{(k)}$ de la iteración k-ésima cuando k=4 si se utiliza el método de Newton-Raphson en la resolución del sistema no lineal: $15\,x+y^2-4\,z-13=0$, $x^2+10\,y-z-11=0$, $y^3-25\,z+22=0$, tomando $\mathbf{x}^{(0)}=[0,0,0]^T$.
Calcular en cada iteración k el valor de la estimación del error absoluto $||\mathbf{e}^{(k)}|| = ||\,\mathbf{x}^{(k)}-\mathbf{x}^{(k-1)}\,||_\infty$ y también del error relativo $||\,\mathbf{x}^{(k)}-\mathbf{x}^{(k-1)}\,||_\infty \,/\, ||\,\mathbf{x}^{(k)}\,||_\infty$. Dar los resultados con cuatro decimales exactos.
You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} 1.4\ 1.9\ 0.931\ 0.00000000756 \end{bmatrix}$$

Solution:

Queremos resolver un sistema de ecuaciones del tipo:

$$f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0,\quad f_2(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0\ ,\ \ldots\quad f_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0$$

donde las funciones $f_i(\mathbf{x})$, $i=1,2,\ldots,n$ son arbitrarias. Llamando entonces a $\mathbf{F}(\mathbf{x})=[f_1(\mathbf{x}),f_2(\mathbf{x}),\ldots,f_n(\mathbf{x})]^T$ queremos resolver $\mathbf{F}(\mathbf{x})=\mathbf{0}$, con $\mathbf{F}:R^n\rightarrow R^n$. Si se usa el método de Newton-Raphson, esto se traduce en usar el esquema iterativo:

$$\mathbf{x}^{(k+1)}=\mathbf{x}^{(k)}-(J(\mathbf{x}^{(k)}))^{-1}\,\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}),\quad k=0,1,2,\ldots$$

siendo:

$$J(\mathbf{x}^{(k)})=\left[\frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}\right]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(k)}},\quad 1\le i,j\le n,\quad \text{la matriz de Jacobi.}$$

Por tanto, al resolver el sistema por Newton-Raphson, debemos resolver en cada iteración el sistema lineal:

$$J(\mathbf{x}^{(k)})\,\mathbf{vc}^{(k)}=-\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})$$

y obtener luego la siguiente iteración usando este vector de corrección recién calculado:

$$\mathbf{x}^{(k+1)}=\mathbf{x}^{(k)}+\mathbf{vc}^{(k)}$$

En nuestro caso la función es:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x})=\begin{bmatrix} 15\,x+y^2-4\,z-13 \\ x^2+10\,y-z-11 \\ y^3-25\,z+22 \end{bmatrix}$$

y la matriz de Jacobi:

$$J(\mathbf{x})=\begin{bmatrix} 15 & 2\,y & -4 \\ 2\,x & 10 & -1 \\ 0 & 3\,y^2 & -25 \end{bmatrix}$$

Como la aproximación inicial es $\mathbf{x}^{(0)}=[0,0,0]^T$, calculamos:

$$J(\mathbf{x}^0)=\begin{bmatrix} 15 & 0 & -4 \\ 0 & 10 & -1 \\ 0 & 0 & -25 \end{bmatrix},\quad \mathbf{F}(\mathbf{x}^0)=\begin{bmatrix} -13 \\ -11 \\ 22 \end{bmatrix}$$

Y por tanto, el sistema lineal a resolver es:

$$\begin{bmatrix} 15 & 0 & -4 \\ 0 & 10 & -1 \\ 0 & 0 & -25 \end{bmatrix}\mathbf{vc}^{(0)}=\begin{bmatrix} 13 \\ 11 \\ -22 \end{bmatrix}$$

Una vez resuelto es $\mathbf{vc}^{(0)}=[[413/375],[297/250],22/25]^T$, por lo que entonces:

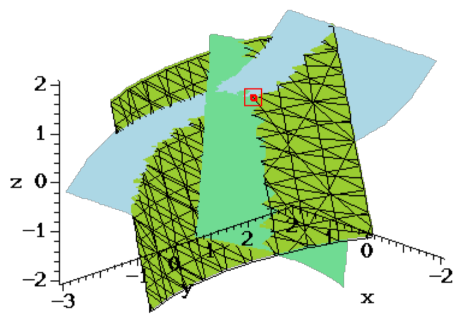
$$\mathbf{x}^{(1)}=\mathbf{x}^{(0)}+\mathbf{vc}^{(0)}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{413}{375} \\ \\ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{413}{375} \\ \\ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \dfrac{297}{250} \\ 22/25 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \dfrac{297}{250} \\ 22/25 \end{bmatrix}$$

Con $\mathbf{x}^{(1)}$ continuaríamos el proceso y obtendríamos $\mathbf{x}^{(2)}$, etc., comprobando la convergencia con cada $\mathbf{x}^{(k)}$ calculado (es $\mathbf{e}^{(k)}=\mathbf{vc}^{(k-1)}$). Las iteraciones son:

NEWTON-RAPHSON SISTEMAS					
Iter.	$\mathbf{x}^{(k)}$			Estimación errores	
k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\Vert \mathbf{e}^{(k)} \Vert_\infty$	$\Vert \mathbf{e}^{(k)} \Vert_\infty / \Vert \mathbf{x}^{(k)} \Vert_\infty$
0	0	0	0	0	0
1	1.1013333333333333333	1.1880000000000000000	.88000000000000000000	1.188	1
2	1.0366870824055885186	1.0859238347813479069	.92977931688107760164	0.1020761652	0.09399937818
3	1.0364004710266715754	1.0857065583035354318	.93119143723357850031	0.001412120353	0.001300646424
4	1.0364004703292111607	1.0857065507416779673	.93119144231538977709	7.561857464e-09	6.964918338e-09
5	1.0364004703292111587	1.0857065507416779686	.93119144231538978471	7.62e-18	7.018471054e-18

A continuación viene la gráfica donde aparecen las funciones que intervienen en el sistema, el punto de intersección pedido, la iteración solicitada en el enunciado y el conjunto de puntos calculados en las diferentes iteraciones. La aproximación inicial aparece con un pequeño círculo rojo.



Mark summary:

Question	Value	Your mark
1	3.00	-
Total	3.00	0.00

New Version Click here to see a new version of this quiz.
New Quiz Click here to select a new quiz.

If you have technical problems, you can send email to the administrator.
Mathematical questions can be sent to the teacher.