Raices

Question 1

Top 1 Bottom Focus Help

Calcular el vector $\mathbf{x}^{(k)}$ de la iteración k-ésima cuando k=4 si se utiliza el método de Newton-Raphson en la resolución del sistema no lineal: $x^2+y^2+z^2-10=0$, $x^2+2\,y-2=0$, $x+3\,z-9=0$, tomando $\mathbf{x}^{(0)} = [2,0,2]^T$.
Calcular en cada iteración k el valor de la estimación del error absoluto $||\mathbf{e}^{(k)}|| = ||\, \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)} \,||_\infty$ y también del error relativo $||\, \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)} \,||_\infty \,/\, ||\, \mathbf{x}^{(k)} \,||_\infty$. Dar los resultados con cuatro decimales exactos.
You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} 1.93 & -0.855 & 2.36 & 0.00442 \end{bmatrix}$$

Solution:

Queremos resolver un sistema de ecuaciones del tipo:

$$f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n) = 0, \quad f_2(x_1,x_2,\ldots,x_n) = 0\ , \ \ldots \quad f_n(x_1,x_2,\ldots,x_n) = 0$$

donde las funciones $f_i(\mathbf{x})$, $i=1,2,\ldots,n$ son arbitrarias. Llamando entonces a $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}),f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_n(\mathbf{x})]^T$ queremos resolver $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, con $\mathbf{F}:R^n \to R^n$. Si se usa el método de Newton-Raphson, esto se traduce en usar el esquema iterativo:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - (J(\mathbf{x}^{(k)}))^{-1}\,\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}), \quad k=0,1,2,\ldots$$

siendo:

$$J(\mathbf{x}^{(k)}) = \left[\frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}\right]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(k)}}, \quad 1 \le i, j \le n, \quad \text{la matriz de Jacobi.}$$

Por tanto, al resolver el sistema por Newton-Raphson, debemos resolver en cada iteración el sistema lineal:

$$J(\mathbf{x}^{(k)})\,\mathbf{vc}^{(k)} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})$$

y obtener luego la siguiente iteración usando este vector de corrección recién calculado:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{vc}^{(k)}$$

En nuestro caso la función es:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x^2+y^2+z^2-10 \\ x^2+2\,y-2 \\ x+3\,z-9 \end{bmatrix}$$

y la matriz de Jacobi:

$$J(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2\,x & 2\,y & 2\,z \\ 2\,x & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Como la aproximación inicial es $\mathbf{x}^{(0)} = [2,0,2]^T$, calculamos:

$$J(\mathbf{x}^0) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}^0) = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Y por tanto, el sistema lineal a resolver es:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{vc}^{(0)} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Una vez resuelto es $\mathbf{vc}^{(0)} = [1/4,-3/2,1/4]^T$, por lo que entonces:

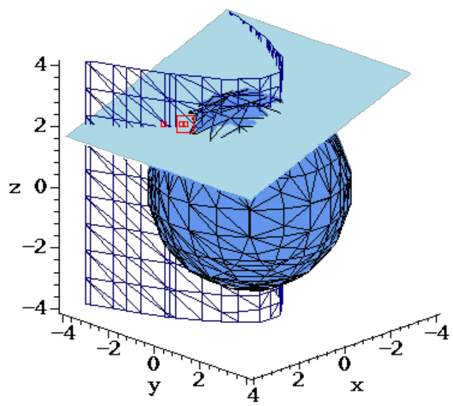
$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{vc}^{(0)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/4 \\ -3/2 \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9/4 \\ -3/2 \\ \end{bmatrix}$$

$$\left[\;2\;\right] \quad \left[\;1/4\;\right] \quad \left[\;9/4\;\right]$$

Con $\mathbf{x}^{(1)}$ continuaríamos el proceso y obtendríamos $\mathbf{x}^{(2)}$, etc., comprobando la convergencia con cada $\mathbf{x}^{(k)}$ calculado (es $\mathbf{e}^{(k)}=\mathbf{vc}^{(k-1)}$). Las iteraciones son:

NEWTON-RAPHSON SISTEMAS					
Iter.	$\mathbf{x}^{(k)}$			Estimación errores	
k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\lVert \mathbf{e}^{(k)} \rVert_\infty$	$\lVert \mathbf{e}^{(k)} \rVert_\infty / \lVert \mathbf{x}^{(k)} \rVert_\infty$
0	2	0	2	0	0
1	2.2500000000000000000	-1.5000000000000000000	2.2500000000000000000	1.5	0.6666666667
2	1.9967948717948717949	-.96153846153846153846	2.3344017094017094017	0.5384615385	0.2306636156
3	1.9294373360488670748	-.85909569805878725485	2.3568542213170443084	0.1024427635	0.04346588879
4	1.9259688046769198803	-.85467190293938268946	2.3580103984410267066	0.004423795119	0.001876071082
5	1.9259610481876703171	-.85466297953799330987	2.3580129839374432276	8.923401389e-06	3.784288488e-06
6	1.9259610481521545422	-.85466297949967287354	2.3580129839492818193	3.832043633e-11	1.625115578e-11
7	1.9259610481521545422	-.85466297949967287359	2.3580129839492818193	5e-20	2.120429376e-20

A continuación viene la gráfica donde aparecen las funciones que intervienen en el sistema, el punto de intersección pedido, la iteración solicitada en el enunciado y el conjunto de puntos calculados en las diferentes iteraciones. La aproximación inicial aparece con un pequeño círculo rojo.



Mark summary:

Question	Value	Your mark
1	3.00	-
Total	3.00	0.00

New Version Click here to see a new version of this quiz.
New Quiz Click here to select a new quiz.

If you have technical problems, you can send email to the administrator.
Mathematical questions can be sent to the teacher.