Raices

Question 1 Top 1 Bottom Focus Help

Calcular el vector $\mathbf{x}^{(k)}$ de la iteración k-ésima cuando k=4 si se utiliza el método de Newton-Raphson en la resolución del sistema no lineal: $x^2+y^2+z^2-1=0$, $x^2+z^2-0.25=0$, $x^2+y^2-4\ z=0$, tomando $\mathbf{x}^{(0)} = [1,1,1]^T$.
Calcular en cada iteración k el valor de la estimación del error absoluto $||\mathbf{e}^{(k)}|| = ||\ \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\ ||_\infty$
y también del error relativo $||\ \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\ ||_\infty \ /\ ||\ \mathbf{x}^{(k)}\ ||_\infty$. Dar los resultados con cuatro decimales exactos.
You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} 0.441\ 0.866\ 0.236\ 0.00652 \end{bmatrix}$$

Solution:

Queremos resolver un sistema de ecuaciones del tipo:

$$f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n) = 0,\quad f_2(x_1,x_2,\ldots,x_n) = 0\ ,\ \ldots\quad f_n(x_1,x_2,\ldots,x_n) = 0$$

donde las funciones $f_i(\mathbf{x})$, $i=1,2,\ldots,n$ son arbitrarias. Llamando entonces a $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}),f_2(\mathbf{x}),\ \ldots,\ f_n(\mathbf{x})]^T$ queremos resolver $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, con $\mathbf{F}:R^n \to R^n$. Si se usa el método de Newton-Raphson, esto se traduce en usar el esquema iterativo:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - (J(\mathbf{x}^{(k)}))^{-1}\ \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}),\quad k=0,1,2,\ldots$$

siendo:

$$J(\mathbf{x}^{(k)}) = \left[\frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right]_{\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(k)}},\quad 1 \le i, j \le n,\quad \text{la matriz de Jacobi.}$$

Por tanto, al resolver el sistema por Newton-Raphson, debemos resolver en cada iteración el sistema lineal:

$$J(\mathbf{x}^{(k)})\ \mathbf{vc}^{(k)} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})$$

y obtener luego la siguiente iteración usando este vector de corrección recién calculado:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{vc}^{(k)}$$

En nuestro caso la función es:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x^2+y^2+z^2-1 \\ x^2+z^2-0.25 \\ x^2+y^2-4\ z \end{bmatrix}$$

y la matriz de Jacobi:

$$J(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2\ x & 2\ y & 2\ z \\ 2\ x & 0 & 2\ z \\ 2\ x & 2\ y & -4 \end{bmatrix}$$

Como la aproximación inicial es $\mathbf{x}^{(0)} = [1,1,1]^T$, calculamos:

$$J(\mathbf{x}^0) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{bmatrix},\quad \mathbf{F}(\mathbf{x}^0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1.75 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Y por tanto, el sistema lineal a resolver es:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{vc}^{(0)} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1.75 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Una vez resuelto es $\mathbf{vc}^{(0)} = [-0.2083333333,-0.125,-0.6666666667]^T$, por lo que entonces:

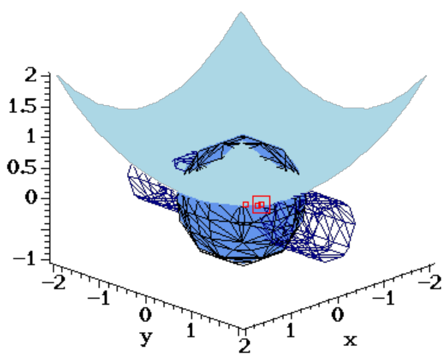
$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{vc}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.2083333333 \\ -0.125 \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7916666667 \\ 0.875 \\ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -0.6666666667 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0.3333333333 \end{bmatrix}$$

Con $\mathbf{x}^{(1)}$ continuaríamos el proceso y obtendríamos $\mathbf{x}^{(2)}$, etc., comprobando la convergencia con cada $\mathbf{x}^{(k)}$ calculado (es $\mathbf{e}^{(k)}=\mathbf{vc}^{(k-1)}$). Las iteraciones son:

NEWTON-RAPHSON SISTEMAS					
Iter.	$\mathbf{x}^{(k)}$			Estimación errores	
k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\lVert \mathbf{e}^{(k)} \rVert_\infty$	$\lVert \mathbf{e}^{(k)} \rVert_\infty / \lVert \mathbf{x}^{(k)} \rVert_\infty$
0	1	1	1	0	0
1	.79166666666666666665	.87500000000000000000	.33333333333333333333	0.6666666667	0.7619047619
2	.52365288220551378445	.86607142857142857143	.23809523809523809524	0.2680137845	0.309459215
3	.44732678796918467718	.86602540500736377028	.23606889564336372847	0.07632609424	0.08813378198
4	.44081103104192828944	.86602540378443864760	.23606797749997819409	0.006515756927	0.007523748032
5	.44076287538553655750	.86602540378443864679	.23606797749978969642	4.815565639e-05	5.560536236e-05
6	.44076287275490751407	.86602540378443864674	.23606797749978969640	2.630629043e-09	3.037588773e-09
7	.44076287275490750622	.86602540378443864675	.23606797749978969640	7.85e-18	9.064399226e-18

A continuación viene la gráfica donde aparecen las funciones que intervienen en el sistema, el punto de intersección pedido, la iteración solicitada en el enunciado y el conjunto de puntos calculados en las diferentes iteraciones. La aproximación inicial aparece con un pequeño círculo rojo.



Mark summary:

Question	Value	Your mark
1	3.00	-
Total	3.00	0.00

New Version Click here to see a new version of this quiz.
New Quiz Click here to select a new quiz.

If you have technical problems, you can send email to the administrator.
Mathematical questions can be sent to the teacher.