Raices

Question 1 Top 1 Bottom Focus Help

Calcular el vector $\mathbf{x}^{(k)}$ de la iteración k-ésima cuando k=4 si se utiliza el método de Newton-Raphson en la resolución del sistema no lineal: $2x-3y+z-4=0$, $2x+y-z+4=0$, $x^2+y^2+z^2-4=0$, tomando $\mathbf{x}^{(0)} = [-1,-1,1]^T$.
Calcular en cada iteración k el valor de la estimación del error absoluto $||\mathbf{e}^{(k)}|| = ||\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}||_\infty$ y también del error relativo $||\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}||_\infty / ||\mathbf{x}^{(k)}||_\infty$. Dar los resultados con cuatro decimales exactos.
You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} -0.666 & -1.33 & 1.34 & 0.0362 \end{bmatrix}$$

Solution:

Queremos resolver un sistema de ecuaciones del tipo:

$$f_1(x_1,x_2,\dots,x_n) = 0, \quad f_2(x_1,x_2,\dots,x_n) = 0, \dots \quad f_n(x_1,x_2,\dots,x_n) = 0$$

donde las funciones $f_i(\mathbf{x})$, $i=1,2,\dots,n$ son arbitrarias. Llamando entonces a $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}),f_2(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x})]^T$ queremos resolver $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, con $\mathbf{F}:R^n \to R^n$. Si se usa el método de Newton-Raphson, esto se traduce en usar el esquema iterativo:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - (J(\mathbf{x}^{(k)}))^{-1}\, \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}), \quad k=0,1,2,\dots$$

siendo:

$$J(\mathbf{x}^{(k)}) = \left[\frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}\right]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(k)}}, \quad 1 \le i, j \le n, \quad \text{la matriz de Jacobi.}$$

Por tanto, al resolver el sistema por Newton-Raphson, debemos resolver en cada iteración el sistema lineal:

$$J(\mathbf{x}^{(k)})\, \mathbf{vc}^{(k)} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})$$

y obtener luego la siguiente iteración usando este vector de corrección recién calculado:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{vc}^{(k)}$$

En nuestro caso la función es:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2x-3y+z-4 \\ 2x+y-z+4 \\ x^2+y^2+z^2-4 \end{bmatrix}$$

y la matriz de Jacobi:

$$J(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2x & 2y & 2z \end{bmatrix}$$

Como la aproximación inicial es $\mathbf{x}^{(0)} = [-1,-1,1]^T$, calculamos:

$$J(\mathbf{x}^0) = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}^0) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Y por tanto, el sistema lineal a resolver es:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{vc}^{(0)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Una vez resuelto es $\mathbf{vc}^{(0)} = [1/2,0,1]^T$, por lo que entonces:

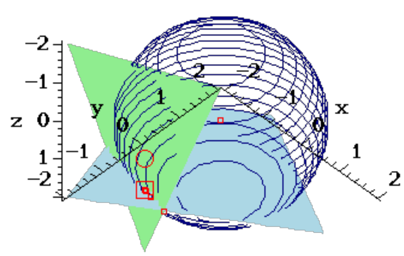
$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{vc}^{(0)} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1 \\ \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$

Con $\mathbf{x}^{(1)}$ continuaríamos el proceso y obtendríamos $\mathbf{x}^{(2)}$, etc., comprobando la convergencia con cada $\mathbf{x}^{(k)}$ calculado (es $\mathbf{e}^{(k)}$=**vc**$^{(k-1)}$). Las iteraciones son:

NEWTON-RAPHSON SISTEMAS					
Iter.	$\mathbf{x}^{(k)}$			Estimación errores	
k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\|\| \mathbf{e}^{(k)} \|\|_\infty$	$\|\| \mathbf{e}^{(k)} \|\|_\infty / \|\| \mathbf{x}^{(k)} \|\|_\infty$
0	-1	-1	1	0	0
1	-.50000000000000000000	-1.	2.0000000000000000000	1	0.5
2	-.61363636363636363636	-1.2272727272727272727	1.5454545454545454546	0.4545454545	0.2941176471
3	-.65718314532183145322	-1.3143662906436629064	1.3712674187126741872	0.1741871267	0.1270263731
4	-.66623725591064227587	-1.3324745118212845517	1.3350509763574308966	0.03621644236	0.02712738539
5	-.66666570294551875270	-1.3333314058910375054	1.3333371882179249893	0.00171378814	0.001285337389
6	-.66666666666179073414	-1.3333333333235814683	1.3333333333528370634	3.854865088e-06	2.891148816e-06
7	-.66666666666666666666	-1.3333333333333333333	1.3333333333333333333	1.95037301e-11	1.462779758e-11
8	-.66666666666666666668	-1.3333333333333333333	1.3333333333333333333	2e-20	1.500000000e-20

A continuación viene la gráfica donde aparecen las funciones que intervienen en el sistema, el punto de intersección pedido, la iteración solicitada en el enunciado y el conjunto de puntos calculados en las diferentes iteraciones. La aproximación inicial aparece con un pequeño círculo rojo.



Mark summary:

Question	Value	Your mark
1	3.00	-
Total	3.00	0.00

New Version Click here to see a new version of this quiz.
New Quiz Click here to select a new quiz.

If you have technical problems, you can send email to the administrator.
Mathematical questions can be sent to the teacher.