Raices

Question 1

Top 1 Bottom Focus Help

Calcular el vector $\mathbf{x}^{(k)}$ de la iteración k-ésima cuando k=4 si se utiliza el método de Newton-Raphson en la resolución del sistema no lineal: $-5\ x^4+6\ y^2+4=0$, $-8\ x^3y^2+384=0$, tomando $\mathbf{x}^{(0)} = [1.5,1.5]^T$.
Calcular en cada iteración k el valor de la estimación del error absoluto $||\mathbf{e}^{(k)}|| = ||\ \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\ ||_\infty$ y también del error relativo $||\ \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\ ||_\infty / ||\ \mathbf{x}^{(k)}\ ||_\infty$. Dar los resultados con cuatro decimales exactos.
You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} 1.81\ 2.86\ 0.100 \end{bmatrix}$$

Solution:

Queremos resolver un sistema de ecuaciones del tipo:

$$f_1(x_1,x_2,\dots,x_n) = 0,\quad f_2(x_1,x_2,\dots,x_n) = 0\ ,\ \dots\quad f_n(x_1,x_2,\dots,x_n) = 0$$

donde las funciones $f_i(\mathbf{x})$, $i=1,2,\dots,n$ son arbitrarias. Llamando entonces a $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}),f_2(\mathbf{x}),\ \dots,\ f_n(\mathbf{x})]^T$ queremos resolver $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, con $\mathbf{F}:R^n \to R^n$. Si se usa el método de Newton-Raphson, esto se traduce en usar el esquema iterativo:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - (J(\mathbf{x}^{(k)}))^{-1}\ \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}),\quad k=0,1,2,\dots$$

siendo:

$$J(\mathbf{x}^{(k)}) = \left[\frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(k)}},\quad 1 \le i, j \le n,\quad \text{la matriz de Jacobi.}$$

Por tanto, al resolver el sistema por Newton-Raphson, debemos resolver en cada iteración el sistema lineal:

$$J(\mathbf{x}^{(k)})\ \mathbf{vc}^{(k)} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})$$

y obtener luego la siguiente iteración usando este vector de corrección recién calculado:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{vc}^{(k)}$$

En nuestro caso la función es:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -5\ x^4+6\ y^2+4 \\ -8\ x^3y^2+384 \end{bmatrix}$$

y la matriz de Jacobi:

$$J(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -20\ x^3 & 12\ y \\ -24\ x^2y^2 & -16\ x^3y \end{bmatrix}$$

Como la aproximación inicial es $\mathbf{x}^{(0)} = [1.5,1.5]^T$, calculamos:

$$J(\mathbf{x}^0) = \begin{bmatrix} -67.5 & 18 \\ -121.5 & -81 \end{bmatrix},\quad \mathbf{F}(\mathbf{x}^0) = \begin{bmatrix} -7.8125 \\ 323.25 \end{bmatrix}$$

Y por tanto, el sistema lineal a resolver es:

$$\begin{bmatrix} -67.5 & 18 \end{bmatrix}\ \mathbf{vc}^{(0)} = \begin{bmatrix} 7.8125 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -121.5 & -81 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -323.25 \end{bmatrix}$$

Una vez resuelto es $\mathbf{vc}^{(0)} = [0.6774691358, 2.974537037]^T$, por lo que entonces:

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{vc}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.6774691358 \\ 2.974537037 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.177469136 \\ 4.474537037 \end{bmatrix}$$

Con $\mathbf{x}^{(1)}$ continuaríamos el proceso y obtendríamos $\mathbf{x}^{(2)}$, etc., comprobando la convergencia con cada $\mathbf{x}^{(k)}$ calculado (es $\mathbf{e}^{(k)}=\mathbf{vc}^{(k-1)}$). Las iteraciones son:

NEWTON-RAPHSON SISTEMAS				
Iter.	$\mathbf{x}^{(k)}$		Estimación errores	
k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$\Vert \mathbf{e}^{(k)} \Vert_\infty$	$\Vert \mathbf{e}^{(k)} \Vert_\infty / \Vert \mathbf{x}^{(k)} \Vert_\infty$
0	1.5	1.5	0	0
1	2.1774691358024691358	4.4745370370370370370	2.974537037	0.6647697879
2	1.9610461656827570092	3.4238939554478869791	1.050643082	0.306856198
3	1.8381568158392435955	2.9632385828642043890	0.4606553726	0.1554567274
4	1.8062287512437972385	2.8628828457211696863	0.1003557371	0.03505408448
5	1.8045011603753309917	2.8581704306081888372	0.004712415113	0.001648752315
6	1.8044966747666956667	2.8581596879505146346	1.074265767e-05	3.758592538e-06
7	1.8044966747384457554	2.8581596878908394754	5.96751592e-11	2.087887512e-11
8	1.8044966747384457554	2.8581596878908394754	0	0

A continuación viene la gráfica donde aparecen las funciones que intervienen en el sistema, el punto de intersección pedido, la iteración solicitada en el enunciado y el conjunto de puntos calculados en las diferentes iteraciones. La aproximación inicial aparece con un pequeño círculo rojo.