# Raices

**Question 1** Top 1 Bottom Focus Help

Calcular el vector $\mathbf{x}^{(k)}$ de la iteración k-ésima cuando k=4 si se utiliza el método de Newton-Raphson en la resolución del sistema no lineal: $5\cos(x) + 6\cos(x+y) - 10 = 0$, $5\sin(x) + 6\sin(x+y) - 4 = 0$, tomando $\mathbf{x}^{(0)} = [0.5, 0.5]^T$.
Calcular en cada iteración k el valor de la estimación del error absoluto $||\mathbf{e}^{(k)}|| = ||\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}||_\infty$ y también del error relativo $||\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}||_\infty / ||\mathbf{x}^{(k)}||_\infty$. Dar los resultados con cuatro decimales exactos.
You have not attempted this yet

---

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} 0.156 \; 0.412 \; 0.0251 \end{bmatrix}$$

---

**Solution:**

Queremos resolver un sistema de ecuaciones del tipo:

$$f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n) = 0, \quad f_2(x_1,x_2,\ldots,x_n) = 0, \ \ldots \quad f_n(x_1,x_2,\ldots,x_n) = 0$$

donde las funciones $f_i(\mathbf{x})$, $i=1,2,\ldots,n$ son arbitrarias. Llamando entonces a $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_n(\mathbf{x})]^T$ queremos resolver $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, con $\mathbf{F}: R^n \to R^n$. Si se usa el método de Newton-Raphson, esto se traduce en usar el esquema iterativo:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - (J(\mathbf{x}^{(k)}))^{-1}\,\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}), \quad k=0,1,2,\ldots$$

siendo:

$$J(\mathbf{x}^{(k)}) = \left[\frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}\right]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(k)}}, \quad 1 \le i, j \le n, \quad \text{la matriz de Jacobi.}$$

Por tanto, al resolver el sistema por Newton-Raphson, debemos resolver en cada iteración el sistema lineal:

$$J(\mathbf{x}^{(k)})\,\mathbf{vc}^{(k)} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})$$

y obtener luego la siguiente iteración usando este vector de corrección recién calculado:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{vc}^{(k)}$$

En nuestro caso la función es:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 5\cos(x) + 6\cos(x+y) - 10 \\ 5\sin(x) + 6\sin(x+y) - 4 \end{bmatrix}$$

y la matriz de Jacobi:

$$J(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -5\sin(x) - 6\sin(x+y) & -6\sin(x+y) \\ 5\cos(x) + 6\cos(x+y) & 6\cos(x+y) \end{bmatrix}$$

Como la aproximación inicial es $\mathbf{x}^{(0)} = [0.5, 0.5]^T$, calculamos:

$$J(\mathbf{x}^0) = \begin{bmatrix} -7.445953602 & -5.48825909 \\ 7.629726645 & 3.241813835 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}^0) = \begin{bmatrix} -2.370273355 \\ 3.445953602 \end{bmatrix}$$

Y por tanto, el sistema lineal a resolver es:

$$\begin{bmatrix} -7.445953602 & -5.48825909 \\ 7.629726645 & 3.241813835 \end{bmatrix} \mathbf{vc}^{(0)} = \begin{bmatrix} 2.370273355 \\ -3.445953602 \end{bmatrix}$$

Una vez resuelto es $\mathbf{vc}^{(0)} = [-0.6753940628, 0.5265936175]^T$ , por lo que entonces:

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{vc}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.6753940628 \\ 0.5265936175 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1753940628 \\ 1.26593617 \end{bmatrix}$$

Con $\mathbf{x}^{(1)}$ continuaríamos el proceso y obtendríamos $\mathbf{x}^{(2)}$, etc., comprobando la convergencia con cada $\mathbf{x}^{(k)}$ calculado (es $\mathbf{e}^{(k)}=\mathbf{vc}^{(k-1)}$). Las iteraciones son:

| NEWTON-RAPHSON SISTEMAS | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Iter. | $\mathbf{x}^{(k)}$ | | Estimación errores | |
| k | $x_1^{(k)}$ | $x_2^{(k)}$ | $\lVert \mathbf{e}^{(k)} \rVert_\infty$ | $\lVert \mathbf{e}^{(k)} \rVert_\infty / \lVert \mathbf{x}^{(k)} \rVert_\infty$ |
| 0 | .5 | .5 | 0 | 0 |
| 1 | -.17539406275787702602 | 1.0265936173941492347 | 0.6753940628 | 0.6578981705 |
| 2 | .60812258064534680720e-1 | .58736219222301272738 | 0.4392314252 | 0.7478033673 |
| 3 | .14193373611155913870 | .43701311021247177926 | 0.150349082 | 0.3440379213 |
| 4 | .15557387477489366978 | .41189213145763239363 | 0.02512097875 | 0.06098921741 |
| 5 | .15598349004498065132 | .41113854295393411541 | 0.0007535885037 | 0.001832930813 |
| 6 | .15598386007243313317 | .41113786232290295762 | 6.806310312e-07 | 1.655481272e-06 |
| 7 | .15598386007273499515 | .41113786232234770639 | 5.5525123e-13 | 1.350523221e-12 |
| 8 | .15598386007273499512 | .41113786232234770642 | 3e-20 | 7.296822489e-20 |

A continuación viene la gráfica donde aparecen las funciones que intervienen en el sistema, el punto de intersección pedido, la iteración solicitada en el enunciado y el conjunto de puntos calculados en las diferentes iteraciones. La aproximación inicial aparece con un pequeño círculo rojo.