

Raices

Question 1

[Top 1](#) [Bottom](#) [Focus](#) [Help](#)

Calcular el vector $\mathbf{x}^{(k)}$ de la iteración k-ésima cuando $k=4$ si se utiliza el método de Newton-Raphson en la resolución del sistema no lineal: $4x^3 - 4y^2 = 0$, $5x^3y^2 - 20 = 0$, tomando $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 1]^T$.
 Calcular en cada iteración k el valor de la estimación del error absoluto $\|\mathbf{e}^{(k)}\| = \|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|_\infty$ y también del error relativo $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|_\infty / \|\mathbf{x}^{(k)}\|_\infty$. Dar los resultados con cuatro decimales exactos.
 You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} 1.26 \\ 1.41 \\ 0.0101 \end{bmatrix}$$

Solution:

Queremos resolver un sistema de ecuaciones del tipo:

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad \dots \quad f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

donde las funciones $f_i(\mathbf{x})$, $i=1, 2, \dots, n$ son arbitrarias. Llamando entonces a $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x})]^T$

queremos resolver $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, con $\mathbf{F}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Si se usa el método de Newton-Raphson, esto se traduce en usar el esquema iterativo:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - (\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)}))^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}), \quad k=0, 1, 2, \dots$$

siendo:

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)}) = \left[\frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right]_{\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(k)}}, \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad \text{la matriz de Jacobi.}$$

Por tanto, al resolver el sistema por Newton-Raphson, debemos resolver en cada iteración el sistema lineal:

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)}) \mathbf{vc}^{(k)} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})$$

y obtener luego la siguiente iteración usando este vector de corrección recién calculado:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{vc}^{(k)}$$

En nuestro caso la función es:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 4x^3 - 4y^2 \\ 5x^3y^2 - 20 \end{bmatrix}$$

y la matriz de Jacobi:

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 12x^2 & -8y \\ 15x^2y^2 & 10x^3y \end{bmatrix}$$

Como la aproximación inicial es $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 1]^T$, calculamos:

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} 12 & -8 \\ 15 & 10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -15 \end{bmatrix}$$

Y por tanto, el sistema lineal a resolver es:

$$\begin{bmatrix} 12 & -8 \end{bmatrix} \mathbf{vc}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 15 & 10 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 15 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Una vez resuelto es $\mathbf{vc}^{(0)} = [1/2, 3/4]^T$, por lo que entonces:

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{vc}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 3/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 7/4 \end{bmatrix}$$

Con $\mathbf{x}^{(1)}$ continuaríamos el proceso y obtendríamos $\mathbf{x}^{(2)}$, etc., comprobando la convergencia con cada $\mathbf{x}^{(k)}$ calculado (es $\mathbf{e}^{(k)} = \mathbf{vc}^{(k-1)}$). Las iteraciones son:

NEWTON-RAPHSON SISTEMAS				
Iter.	$\mathbf{x}^{(k)}$		Estimación errores	
k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$\ \mathbf{e}^{(k)}\ _\infty$	$\ \mathbf{e}^{(k)}\ _\infty / \ \mathbf{x}^{(k)}\ _\infty$
0	1	1	0	0
1	1.50000000000000000000	1.75000000000000000000	0.75	0.4285714286
2	1.3299172959367134124	1.5112690707350901526	0.2387309293	0.1579671905
3	1.2676056287666076887	1.4244664395236553975	0.08680263121	0.06093694369
4	1.2600222166600541078	1.4143429722486237901	0.01012346728	0.007157717381
5	1.2599210672724470179	1.4142135838773827204	0.0001293883712	9.149139332e-05
6	1.2599210498948736687	1.4142135623730956572	2.150428706e-08	1.520582721e-08
7	1.2599210498948731648	1.4142135623730950488	6.084e-16	4.302037657e-16
8	1.2599210498948731648	1.4142135623730950488	0	0

A continuación viene la gráfica donde aparecen las funciones que intervienen en el sistema, el punto de intersección pedido, la iteración solicitada en el enunciado y el conjunto de puntos calculados en las diferentes iteraciones. La aproximación inicial aparece con un pequeño círculo rojo.

