Raices

Question 1 Top 1 Bottom Focus Help

Calcular el vector $\mathbf{x}^{(k)}$ de la iteración k-ésima cuando k=4 si se utiliza el método de Newton-Raphson en la resolución del sistema no lineal: $x^3+6\,y^2-76=0$, $8\,x^3y^2-1024=0$, tomando $\mathbf{x}^{(0)} = [3,1]^T$.
Calcular en cada iteración k el valor de la estimación del error absoluto $||\mathbf{e}^{(k)}|| = ||\,\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\,||_\infty$ y también del error relativo $||\,\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\,||_\infty / ||\,\mathbf{x}^{(k)}\,||_\infty$. Dar los resultados con cuatro decimales exactos.
You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1.41 & 0.0116 \end{bmatrix}$$

Solution:

Queremos resolver un sistema de ecuaciones del tipo:

$$f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n) = 0,\quad f_2(x_1,x_2,\ldots,x_n) = 0\ ,\ \ldots\quad f_n(x_1,x_2,\ldots,x_n) = 0$$

donde las funciones $f_i(\mathbf{x})$, $i=1,2,\ldots,n$ son arbitrarias. Llamando entonces a $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}),f_2(\mathbf{x}),\ \ldots,\ f_n(\mathbf{x})]^T$ queremos resolver $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, con $\mathbf{F}:R^n \to R^n$. Si se usa el método de Newton-Raphson, esto se traduce en usar el esquema iterativo:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - (J(\mathbf{x}^{(k)}))^{-1}\,\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}),\quad k=0,1,2,\ldots$$

siendo:

$$J(\mathbf{x}^{(k)}) = \left[\frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}\right]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(k)}},\quad 1 \le i, j \le n,\quad \text{la matriz de Jacobi.}$$

Por tanto, al resolver el sistema por Newton-Raphson, debemos resolver en cada iteración el sistema lineal:

$$J(\mathbf{x}^{(k)})\,\mathbf{vc}^{(k)} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})$$

y obtener luego la siguiente iteración usando este vector de corrección recién calculado:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{vc}^{(k)}$$

En nuestro caso la función es:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x^3+6\,y^2-76 \\ 8\,x^3y^2-1024 \end{bmatrix}$$

y la matriz de Jacobi:

$$J(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 3\,x^2 & 12\,y \\ 24\,x^2y^2 & 16\,x^3y \end{bmatrix}$$

Como la aproximación inicial es $\mathbf{x}^{(0)} = [3,1]^T$, calculamos:

$$J(\mathbf{x}^0) = \begin{bmatrix} 27 & 12 \\ 216 & 432 \end{bmatrix},\quad \mathbf{F}(\mathbf{x}^0) = \begin{bmatrix} -43 \\ -808 \end{bmatrix}$$

Y por tanto, el sistema lineal a resolver es:

$$\begin{bmatrix} 27 & 12 \end{bmatrix}\ \mathbf{vc}^{(0)} = \begin{bmatrix} 43 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} 216\,432 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 808 \end{matrix}$$

Una vez resuelto es $\mathbf{vc}^{(0)}$ = [[185/189],29/21]^T , por lo que entonces:

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{vc}^{(0)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{185}{189} \\ 29/21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{752}{189} \\ 50/21 \end{bmatrix}$$

Con $\mathbf{x}^{(1)}$ continuaríamos el proceso y obtendríamos $\mathbf{x}^{(2)}$, etc., comprobando la convergencia con cada $\mathbf{x}^{(k)}$ calculado (es $\mathbf{e}^{(k)}=\mathbf{vc}^{(k-1)}$). Las iteraciones son:

NEWTON-RAPHSON SISTEMAS				
Iter.	$\mathbf{x}^{(k)}$		Estimación errores	
k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$\|\| \mathbf{e}^{(k)} \|\|_\infty$	$\|\| \mathbf{e}^{(k)} \|\|_\infty / \|\| \mathbf{x}^{(k)} \|\|_\infty$
0	3	1	0	0
1	3.9788359788359788359	2.3809523809523809524	1.380952381	0.3470744681
2	4.0162772138394534952	1.5836065394337877947	0.7973458415	0.1985285873
3	3.9990727955949529206	1.4258021230316979200	0.1578044164	0.03946025103
4	4.0000037533361094282	1.4142507348238458368	0.01155138821	0.002887844342
5	3.9999999999579873740	1.4142135629904070191	3.717183344e-05	9.292958360e-06
6	4.0000000000000000000	1.4142135623730950489	6.173119702e-10	1.543279926e-10
7	4.0000000000000000000	1.4142135623730950488	1e-19	2.500000000e-20

A continuación viene la gráfica donde aparecen las funciones que intervienen en el sistema, el punto de intersección pedido, la iteración solicitada en el enunciado y el conjunto de puntos calculados en las diferentes iteraciones. La aproximación inicial aparece con un pequeño círculo rojo.