Raices

Question 1 Top 1 Bottom Focus Help

Calcular el vector $\mathbf{x}^{(k)}$ de la iteración k-ésima cuando k=4 si se utiliza el método de Newton-Raphson en la resolución del sistema no lineal: $5\,x^4+7\,y^2-72=0$, $7\,x^4y^2-252=0$, tomando $\mathbf{x}^{(0)} = [1.5,1.5]^T$.
Calcular en cada iteración k el valor de la estimación del error absoluto $||\mathbf{e}^{(k)}|| = ||\,\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\,||_\infty$ y también del error relativo $||\,\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\,||_\infty \,/\, ||\,\mathbf{x}^{(k)}\,||_\infty$. Dar los resultados con cuatro decimales exactos.
You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} 1.56\;2.46\;0.0659 \end{bmatrix}$$

Solution:

Queremos resolver un sistema de ecuaciones del tipo:

$$f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n) = 0,\quad f_2(x_1,x_2,\ldots,x_n) = 0\;,\;\ldots\quad f_n(x_1,x_2,\ldots,x_n) = 0$$

donde las funciones $f_i(\mathbf{x})$, $i=1,2,\ldots,n$ son arbitrarias. Llamando entonces a $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}),f_2(\mathbf{x}),\ldots,f_n(\mathbf{x})]^T$ queremos resolver $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, con $\mathbf{F}:R^n \to R^n$. Si se usa el método de Newton-Raphson, esto se traduce en usar el esquema iterativo:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - (J(\mathbf{x}^{(k)}))^{-1}\,\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}),\quad k=0,1,2,\ldots$$

siendo:

$$J(\mathbf{x}^{(k)}) = \left[\frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}\right]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(k)}},\quad 1 \le i, j \le n,\quad \text{la matriz de Jacobi.}$$

Por tanto, al resolver el sistema por Newton-Raphson, debemos resolver en cada iteración el sistema lineal:

$$J(\mathbf{x}^{(k)})\,\mathbf{vc}^{(k)} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})$$

y obtener luego la siguiente iteración usando este vector de corrección recién calculado:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{vc}^{(k)}$$

En nuestro caso la función es:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 5\,x^4+7\,y^2-72 \\ 7\,x^4y^2-252 \end{bmatrix}$$

y la matriz de Jacobi:

$$J(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 20\,x^3 & 14\,y \\ 28\,x^3y^2 & 14\,x^4y \end{bmatrix}$$

Como la aproximación inicial es $\mathbf{x}^{(0)} = [1.5,1.5]^T$, calculamos:

$$J(\mathbf{x}^0) = \begin{bmatrix} 67.5 & 21 \\ 212.625 & 106.3125 \end{bmatrix},\quad \mathbf{F}(\mathbf{x}^0) = \begin{bmatrix} -30.9375 \\ -172.265625 \end{bmatrix}$$

Y por tanto, el sistema lineal a resolver es:

$$\begin{bmatrix} 67.5 & 21 \end{bmatrix}\,\mathbf{vc}^{(0)} = \begin{bmatrix} 30.9375 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \vdots & \vdots \\ 212.625 & 106.3125 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \vdots \\ 172.265625 \end{bmatrix}$$

Una vez resuelto es $\mathbf{vc}^{(0)} = [-0.1211873638, 1.862745098]^T$, por lo que entonces:

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{vc}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.1211873638 \\ 1.862745098 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.378812636 \\ 3.362745098 \end{bmatrix}$$

Con $\mathbf{x}^{(1)}$ continuaríamos el proceso y obtendríamos $\mathbf{x}^{(2)}$, etc., comprobando la convergencia con cada $\mathbf{x}^{(k)}$ calculado (es $\mathbf{e}^{(k)}=\mathbf{vc}^{(k-1)}$). Las iteraciones son:

NEWTON-RAPHSON SISTEMAS				
Iter.	$\mathbf{x}^{(k)}$		Estimación errores	
k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$\|\| \mathbf{e}^{(k)} \|\|_\infty$	$\|\| \mathbf{e}^{(k)} \|\|_\infty / \|\| \mathbf{x}^{(k)} \|\|_\infty$
0	1.5	1.5	0	0
1	1.3788126361655773420	3.3627450980392156863	1.862745098	0.5539358601
2	1.4679434935732875721	2.7276238120011584769	0.635121286	0.2328478301
3	1.5377168557846327700	2.5257017322049516661	0.2019220798	0.07994692216
4	1.5613562706663857294	2.4598277024618128069	0.06587402974	0.02677993653
5	1.5649927905977023733	2.4497439401805972867	0.01008376228	0.004116251546
6	1.5650845215485389499	2.4494899048375966745	0.000254035343	0.0001037094876
7	1.5650845800732634960	2.4494897427832440574	1.620543526e-07	6.615841242e-08
8	1.5650845800732873166	2.4494897427831780982	6.59592e-14	2.692773064e-14
9	1.5650845800732873166	2.4494897427831780982	0	0

A continuación viene la gráfica donde aparecen las funciones que intervienen en el sistema, el punto de intersección pedido, la iteración solicitada en el enunciado y el conjunto de puntos calculados en las diferentes iteraciones. La aproximación inicial aparece con un pequeño círculo rojo.