Raices

Question 1 Top 1 Bottom Focus Help

Calcular el vector $\mathbf{x}^{(k)}$ de la iteración k-ésima cuando k=4 si se utiliza el método de Newton-Raphson en la resolución del sistema no lineal: $x^2+y^2+0.6\,y-0.16=0$, $x^2-y^2+x-1.6\,y-0.14=0$, tomando $\mathbf{x}^{(0)} = [0,0]^T$.
Calcular en cada iteración k el valor de la estimación del error absoluto $||\mathbf{e}^{(k)}|| = ||\,\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\,||_\infty$ y también del error relativo $||\,\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\,||_\infty \,/\, ||\,\mathbf{x}^{(k)}\,||_\infty$. Dar los resultados con cuatro decimales exactos.
You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} 0.272 & 0.120 & 0.00438 \end{bmatrix}$$

Solution:

Queremos resolver un sistema de ecuaciones del tipo:

$$f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n) = 0, \quad f_2(x_1,x_2,\ldots,x_n) = 0\ , \ldots \quad f_n(x_1,x_2,\ldots,x_n) = 0$$

donde las funciones $f_i(\mathbf{x})$, $i=1,2,\ldots,n$ son arbitrarias. Llamando entonces a $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}),f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_n(\mathbf{x})]^T$ queremos resolver $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, con $\mathbf{F}:R^n \to R^n$. Si se usa el método de Newton-Raphson, esto se traduce en usar el esquema iterativo:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - (J(\mathbf{x}^{(k)}))^{-1}\,\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}), \quad k=0,1,2,\ldots$$

siendo:

$$J(\mathbf{x}^{(k)}) = \left[\frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}\right]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(k)}}, \quad 1 \le i, j \le n, \quad \text{la matriz de Jacobi.}$$

Por tanto, al resolver el sistema por Newton-Raphson, debemos resolver en cada iteración el sistema lineal:

$$J(\mathbf{x}^{(k)})\,\mathbf{vc}^{(k)} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})$$

y obtener luego la siguiente iteración usando este vector de corrección recién calculado:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{vc}^{(k)}$$

En nuestro caso la función es:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x^2+y^2+0.6\,y-0.16 \\ x^2-y^2+x-1.6\,y-0.14 \end{bmatrix}$$

y la matriz de Jacobi:

$$J(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2\,x & 2\,y+0.6 \\ 2\,x+1 & -2\,y-1.6 \end{bmatrix}$$

Como la aproximación inicial es $\mathbf{x}^{(0)} = [0,0]^T$, calculamos:

$$J(\mathbf{x}^0) = \begin{bmatrix} 0 & 0.6 \\ 1 & -1.6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}^0) = \begin{bmatrix} -0.16 \\ -0.14 \end{bmatrix}$$

Y por tanto, el sistema lineal a resolver es:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0.6 \\ 1 & -1.6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{vc}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.16 \\ 0.14 \end{bmatrix}$$

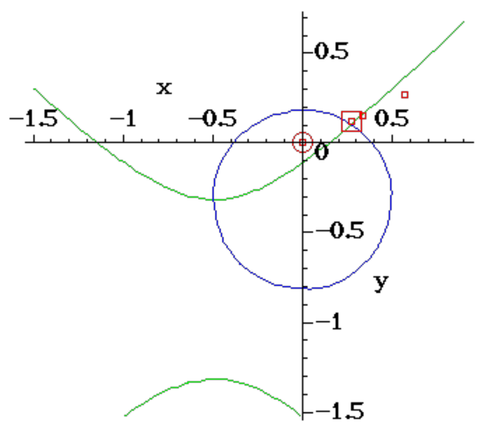
Una vez resuelto es $\mathbf{vc}^{(0)} = [0.5666666667, 0.2666666667]^T$, por lo que entonces:

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{vc}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5666666667 \\ 0.2666666667 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5666666667 \\ 0.2666666667 \end{bmatrix}$$

Con $\mathbf{x}^{(1)}$ continuaríamos el proceso y obtendríamos $\mathbf{x}^{(2)}$, etc., comprobando la convergencia con cada $\mathbf{x}^{(k)}$ calculado (es $\mathbf{e}^{(k)}=\mathbf{vc}^{(k-1)}$). Las iteraciones son:

NEWTON-RAPHSON SISTEMAS				
Iter.	$\mathbf{x}^{(k)}$		Estimación errores	
k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$\Vert \mathbf{e}^{(k)} \Vert_\infty$	$\Vert \mathbf{e}^{(k)} \Vert_\infty / \Vert \mathbf{x}^{(k)} \Vert_\infty$
0	0	0	0	0
1	.5666666666666666667	.2666666666666666667	0.5666666667	1
2	.33503370098039215686	.15222120098039215686	0.2316329657	0.6913721366
3	.27625020026097185008	.12196754663576577790	0.05878350072	0.2127907986
4	.27186922686116100783	.11965659403347216762	0.0043809734	0.01611426733
5	.27184450713513323458	.11964337803209053298	2.471972603e-05	9.093332909e-05
6	.27184450634603818159	.11964337760708056671	7.890950530e-10	2.902744159e-09
7	.27184450634603818079	.11964337760708056628	8.0e-19	2.942858808e-18

A continuación viene la gráfica donde aparecen las funciones que intervienen en el sistema, el punto de intersección pedido, la iteración solicitada en el enunciado y el conjunto de puntos calculados en las diferentes iteraciones. La aproximación inicial aparece con un pequeño círculo rojo.



Mark summary:

Question	Value	Your mark
1	3.00	-
Total	3.00	0.00

New Version	Click here to see a new version of this quiz.
New Quiz	Click here to select a new quiz.

If you have technical problems, you can send email to the administrator.
Mathematical questions can be sent to the teacher.