Raices

Question 1 Top 1 Bottom Focus Help

Calcular el vector $\mathbf{x}^{(k)}$ de la iteración k-ésima cuando k=4 si se utiliza el método de Newton-Raphson en la resolución del sistema no lineal: $x^2-y-1=0$, $(x-2)^2+(y-0.5)^2-1=0$, tomando $\mathbf{x}^{(0)} = [2,2]^T$.
Calcular en cada iteración k el valor de la estimación del error absoluto $||\mathbf{e}^{(k)}|| = ||\,\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\,||_\infty$ y también del error relativo $||\,\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\,||_\infty \,/\, ||\,\mathbf{x}^{(k)}\,||_\infty$. Dar los resultados con cuatro decimales exactos.
You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} 1.55 & 1.39 & 0.000500 \end{bmatrix}$$

Solution:

Queremos resolver un sistema de ecuaciones del tipo:

$$f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n) = 0, \quad f_2(x_1,x_2,\ldots,x_n) = 0\ ,\ \ldots \quad f_n(x_1,x_2,\ldots,x_n) = 0$$

donde las funciones $f_i(\mathbf{x})$, $i=1,2,\ldots,n$ son arbitrarias. Llamando entonces a $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}),f_2(\mathbf{x}),\ \ldots,\ f_n(\mathbf{x})]^T$ queremos resolver $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, con $\mathbf{F}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Si se usa el método de Newton-Raphson, esto se traduce en usar el esquema iterativo:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - (J(\mathbf{x}^{(k)}))^{-1}\,\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}), \quad k=0,1,2,\ldots$$

siendo:

$$J(\mathbf{x}^{(k)}) = \left[\frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}\right]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(k)}}, \quad 1 \le i, j \le n, \quad \text{la matriz de Jacobi.}$$

Por tanto, al resolver el sistema por Newton-Raphson, debemos resolver en cada iteración el sistema lineal:

$$J(\mathbf{x}^{(k)})\,\mathbf{vc}^{(k)} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})$$

y obtener luego la siguiente iteración usando este vector de corrección recién calculado:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{vc}^{(k)}$$

En nuestro caso la función es:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x^2-y-1 \\ (x-2)^2+(y-0.5)^2-1 \end{bmatrix}$$

y la matriz de Jacobi:

$$J(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2x & -1 \\ 2x-4 & 2y-1 \end{bmatrix}$$

Como la aproximación inicial es $\mathbf{x}^{(0)} = [2,2]^T$, calculamos:

$$J(\mathbf{x}^0) = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}^0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.25 \end{bmatrix}$$

Y por tanto, el sistema lineal a resolver es:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{vc}^{(0)} = \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \quad 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \vdots \\ -1.25 \end{bmatrix}$$

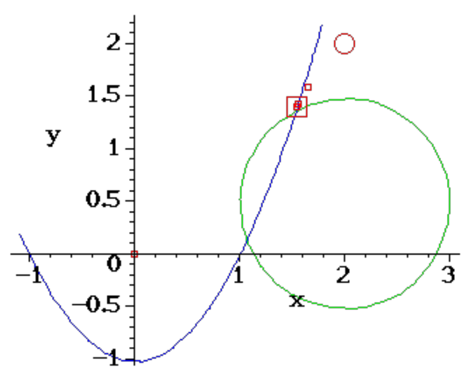
Una vez resuelto es $\mathbf{vc}^{(0)} = [-0.3541666667, -0.4166666667]^T$, por lo que entonces:

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{vc}^{(0)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.3541666667 \\ -0.4166666667 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.645833333 \\ 1.583333333 \end{bmatrix}$$

Con $\mathbf{x}^{(1)}$ continuaríamos el proceso y obtendríamos $\mathbf{x}^{(2)}$, etc., comprobando la convergencia con cada $\mathbf{x}^{(k)}$ calculado (es $\mathbf{e}^{(k)}=\mathbf{vc}^{(k-1)}$). Las iteraciones son:

NEWTON-RAPHSON SISTEMAS				
Iter.	$\mathbf{x}^{(k)}$		Estimación errores	
k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$\lVert \mathbf{e}^{(k)} \rVert_\infty$	$\lVert \mathbf{e}^{(k)} \rVert_\infty / \lVert \mathbf{x}^{(k)} \rVert_\infty$
0	2	2	0	0
1	1.6458333333333333333	1.5833333333333333333	0.4166666667	0.253164557
2	1.5569707207207207207	1.4162612612612612613	0.1670720721	0.1073058535
3	1.5465397982135873884	1.3916765433141737764	0.02458471795	0.01589659573
4	1.5463429610257607987	1.3911765143690390691	0.0005000289451	0.0003233622539
5	1.5463428833199574770	1.3911763127942735859	2.015747655e-07	1.303558012e-07
6	1.5463428833199450051	1.3911763127942410522	3.25337e-14	2.103912421e-14
7	1.5463428833199450051	1.3911763127942410522	0	0

A continuación viene la gráfica donde aparecen las funciones que intervienen en el sistema, el punto de intersección pedido, la iteración solicitada en el enunciado y el conjunto de puntos calculados en las diferentes iteraciones. La aproximación inicial aparece con un pequeño círculo rojo.



Mark summary: