Raices

Question 1 Top 1 Bottom Focus Help

Calcular el vector $\mathbf{x}^{(k)}$ de la iteración k-ésima cuando k=4 si se utiliza el método de Newton-Raphson en la resolución del sistema no lineal: $2x-\cos(y) = 0$, $2y-\sin(x) = 0$, tomando $\mathbf{x}^{(0)} = [0,0]^T$.
Calcular en cada iteración k el valor de la estimación del error absoluto $\|\mathbf{e}^{(k)}\| = \| \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)} \|_\infty$ y también del error relativo $\| \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)} \|_\infty / \| \mathbf{x}^{(k)} \|_\infty$. Dar los resultados con cuatro decimales exactos.
You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} 0.486 & 0.234 & 0.000000000610 \end{bmatrix}$$

Solution:

Queremos resolver un sistema de ecuaciones del tipo:

$$f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n) = 0, \quad f_2(x_1,x_2,\ldots,x_n) = 0 \;, \ldots \quad f_n(x_1,x_2,\ldots,x_n) = 0$$

donde las funciones $f_i(\mathbf{x})$, $i=1,2,\ldots,n$ son arbitrarias. Llamando entonces a $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}),f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_n(\mathbf{x})]^T$ queremos resolver $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, con $\mathbf{F}:\mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n$. Si se usa el método de Newton-Raphson, esto se traduce en usar el esquema iterativo:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - (J(\mathbf{x}^{(k)}))^{-1}\, \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}), \quad k=0,1,2,\ldots$$

siendo:

$$J(\mathbf{x}^{(k)}) = \left[\frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right]_{\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(k)}}, \quad 1 \le i, j \le n, \quad \text{la matriz de Jacobi.}$$

Por tanto, al resolver el sistema por Newton-Raphson, debemos resolver en cada iteración el sistema lineal:

$$J(\mathbf{x}^{(k)})\, \mathbf{vc}^{(k)} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})$$

y obtener luego la siguiente iteración usando este vector de corrección recién calculado:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{vc}^{(k)}$$

En nuestro caso la función es:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2x-\cos(y) \\ 2y-\sin(x) \end{bmatrix}$$

y la matriz de Jacobi:

$$J(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2 & \sin(y) \\ -\cos(x) & 2 \end{bmatrix}$$

Como la aproximación inicial es $\mathbf{x}^{(0)} = [0,0]^T$, calculamos:

$$J(\mathbf{x}^0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}^0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Y por tanto, el sistema lineal a resolver es:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{vc}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

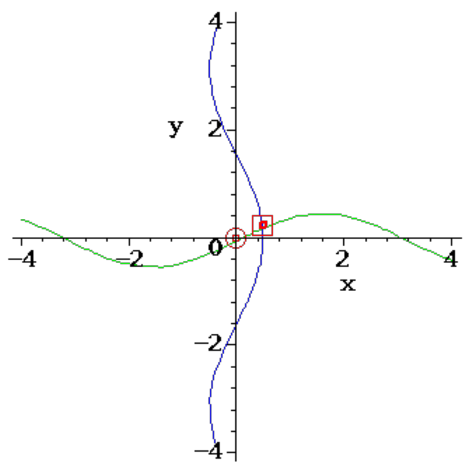
Una vez resuelto es $\mathbf{vc}^{(0)} = [1/2,1/4]^T$, por lo que entonces:

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{vc}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/4 \end{bmatrix}$$

Con $\mathbf{x}^{(1)}$ continuaríamos el proceso y obtendríamos $\mathbf{x}^{(2)}$, etc., comprobando la convergencia con cada $\mathbf{x}^{(k)}$ calculado (es $\mathbf{e}^{(k)}$=$\mathbf{vc}^{(k-1)}$). Las iteraciones son:

NEWTON-RAPHSON SISTEMAS				
Iter.	$\mathbf{x}^{(k)}$		Estimación errores	
k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$\|\| \mathbf{e}^{(k)} \|\|_\infty$	$\|\| \mathbf{e}^{(k)} \|\|_\infty / \|\| \mathbf{x}^{(k)} \|\|_\infty$
0	0	0	0	0
1	.50000000000000000000	.25000000000000000000	0.5	1
2	.48646351335519911912	.23377307698773191375	0.01622692301	0.03335691695
3	.48640515514571320488	.23372550256881985152	5.835820949e-05	0.0001199785999
4	.48640515466592129449	.23372550195872078507	6.100990664e-10	1.254302222e-09
5	.48640515466592129440	.23372550195872078501	9e-20	1.850309339e-19

A continuación viene la gráfica donde aparecen las funciones que intervienen en el sistema, el punto de intersección pedido, la iteración solicitada en el enunciado y el conjunto de puntos calculados en las diferentes iteraciones. La aproximación inicial aparece con un pequeño círculo rojo.



(cc) Jesús García Quesada 2011

Mark summary:

Question	Value	Your mark
1	3.00	-

Total	3.00	0.00

New Version	Click here to see a new version of this quiz.
New Quiz	Click here to select a new quiz.

If you have technical problems, you can send email to the administrator.
Mathematical questions can be sent to the teacher.