Raices

Question 1

Top 1 Bottom Focus Help

Obtener una raiz de la función $f(x) = 3x^{-1} - 1.1$ en el intervalo [1,5] por el método de Newton-Raphson, tomando como aproximación inicial $x_0 = 1$. Entrar también la cuarta iteración resultante del proceso iterativo y dar los resultados con seis cifras decimales correctas.
You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} 2.73 & 2.73 \end{bmatrix}$$

Solution:
Dada x_n, la aproximación más reciente a un cero α de la función f : **R** → **R**, se quiere obtener una nueva aproximación a esa raíz. Consideramos el punto de intersección con el eje x de la tangente a f en el punto $(x_n,f(x_n))$, tomando ese punto de intersección x_{n+1} como siguiente aproximación. El punto de intersección viene definido por: (ver apuntes de clase, donde se obtuvo analíticamente)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n=0,1,2,\ldots$$

Tiene orden de convergencia 2 (*cuadrática*) y constante de error asintótico

$$\frac{f''(\alpha)}{2\,f'(\alpha)}$$

Partiendo de x_0=1 para comenzar el proceso, obtenemos el valor de la primera iteración:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{1.9}{-3} = 1.633333333$$

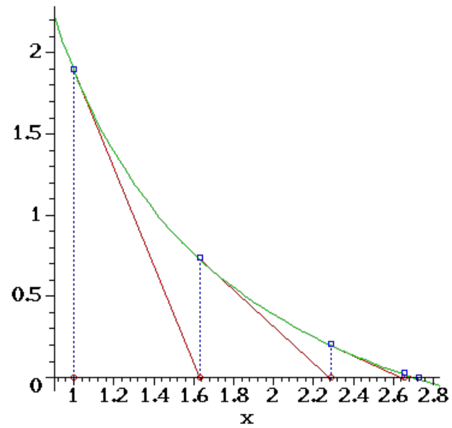
y las iteraciones que se obtienen son:

NEWTON-RAPHSON						
k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	$\lvert e_k \rvert / \lvert x_k \rvert$	$\lvert e_k \rvert$	$\lvert e_k \rvert / \lvert e_{k-1} \rvert^2$
0	1.000000000000000	1.900000000000000	-3.000000000000000	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
1	1.633333333333333	0.736734693877551	-1.124531445231154	0.3877551020	0.6333333333	0.0000000000
2	2.288481481481481	0.210912945669941	-0.572830917041681	0.2862807296	0.6551481481	1.6333333333
3	2.656675549565615	0.029230854136675	-0.425054107311415	0.1385920340	0.3681940681	0.8578231293
4	2.725445274722650	0.000737566746883	-0.403874396949283	0.0252324733	0.0687697252	0.5072752971
5	2.727271502759026	0.000000493887415	-0.403333695517519	0.0006696172	0.0018262280	0.3861539028
6	2.727272727272177	0.000000000000222	-0.403333333333496	0.0000004490	0.0000012245	0.3671583778
7	2.727272727272727	0.000000000000000	-0.403333333333333	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
8	2.727272727272727	0.000000000000000	-0.403333333333333	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000

La convergencia se produjo en la iteración: 6. Como es $f'(x)=-3x^{-2}$ y $f''(x)=6x^{-3}$, siendo la aproximación a la raiz α = 2.7272727272727272727, la constante de error asintótico vale aproximadamente 0.36666666666666666666, que es el valor hacia el que tiende la última columna de la tabla.

Sigue una gráfica con la representación de la función, y las tangentes trazadas desde los diferentes puntos (inicial y siguientes), junto a su intersección con el eje x, que produce la siguiente aproximación. Aparecen los diferentes puntos de la sucesión $\{x_n\}$ sobre el eje x con un pequeño círculo y los puntos correspondientes sobre la curva con un cuadrado, y ambas sucesiones de puntos se van aproximando progresivamente a la solución.

Sugerencia: asignar a cada uno de los puntos obtenidos sobre la curva el número de iteración que le corresponde, y seguir así gráficamente la convergencia del proceso.



Partiendo ahora de $x_0 = 5$, las iteraciones son:

NEWTON-RAPHSON						
k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	$\|e_k\| / \|x_k\|$	$\|e_k\|$	$\|e_k\| / \|e_{k-1}\|^2$
0	5.000000000000000	-0.500000000000000	-0.120000000000000	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
1	0.833333333333333	2.500000000000000	-4.320000000000000	5.0000000000	4.1666666667	0.0000000000
2	1.412037037037037	1.024590163934426	-1.504627788228971	0.4098360656	0.5787037037	0.0333333333
3	2.092996256287151	0.333351823247796	-0.684832483069260	0.3253513795	0.6809592193	2.0333333333
4	2.579760292002558	0.062898742685596	-0.450777828579913	0.1886857617	0.4867640357	1.0497267760
5	2.719294090467637	0.003227492207027	-0.405703633187135	0.0513125075	0.1395337985	0.5889012155
6	2.727249385769463	0.000009414486891	-0.403340237319931	0.0029169666	0.0079552953	0.4085991618
7	2.727272727072958	0.000000000080574	-0.403333333392421	0.0000085585	0.0000233413	0.3688183281
8	2.727272727272727	0.000000000000000	-0.403333333333333	0.0000000001	0.0000000002	0.3666729426
9	2.727272727272727	0.000000000000000	-0.403333333333333	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000

La convergencia se produjo en la iteración: 8. La gráfica correspondiente es: