Raices

Question 1 Top 1 Bottom Focus Help

Obtener una raiz de la función $f(x) = 3\ (x+1)^{-1} - 1.8$ en el intervalo [0,2] por el método de Newton-Raphson, tomando como aproximación inicial $x_0 = 0$. Entrar también la cuarta iteración resultante del proceso iterativo y dar los resultados con seis cifras decimales correctas.
You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} 0.667 & 0.667 \end{bmatrix}$$

Solution:

Dada x_n, la aproximación más reciente a un cero α de la función $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, se quiere obtener una nueva aproximación a esa raíz. Consideramos el punto de intersección con el eje x de la tangente a f en el punto $(x_n, f(x_n))$, tomando ese punto de intersección x_{n+1} como siguiente aproximación. El punto de intersección viene definido por: (ver apuntes de clase, donde se obtuvo analíticamente)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n=0,1,2,\ldots$$

Tiene orden de convergencia 2 (*cuadrática*) y constante de error asintótico

$$\frac{f''(\alpha)}{2\ f(\alpha)}$$

Partiendo de $x_0=0$ para comenzar el proceso, obtenemos el valor de la primera iteración:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0 - \frac{1.2}{-3} = 0.4$$

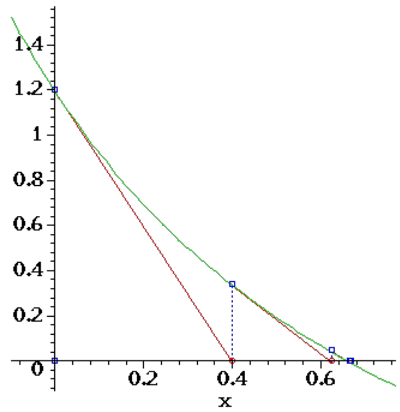
y las iteraciones que se obtienen son:

NEWTON-RAPHSON						
k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	$\lvert e_k \rvert / \lvert x_k \rvert$	$\lvert e_k \rvert$	$\lvert e_k \rvert / \lvert e_{k-1} \rvert^2$
0	0.000000000000000	1.200000000000000	-3.000000000000000	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
1	0.400000000000000	0.342857142857143	-1.530612244897959	1.0000000000	0.4000000000	0.0000000000
2	0.624000000000000	0.047290640394089	-1.137494236695867	0.3589743590	0.2240000000	1.4000000000
3	0.665574400000000	0.001180421601100	-1.081416970386373	0.0624639409	0.0415744000	0.8285714286
4	0.666665950838784	0.000000773094445	-1.080000927713534	0.0016373280	0.0010915508	0.6315270936
5	0.666666666666359	0.000000000000332	-1.080000000000398	0.0000010737	0.0000007158	0.6007869477
6	0.666666666666667	0.000000000000000	-1.080000000000000	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
7	0.666666666666667	0.000000000000000	-1.080000000000000	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000

La convergencia se produjo en la iteración: 6. Como es $f'(x) = -3\ (x+1)^{-2}$ y $f''(x) = 6\ (x+1)^{-3}$, siendo la aproximación a la raiz α = 0.66666666666666666663, la constante de error asintótico vale aproximadamente 0.60000000000000000005, que es el valor hacia el que tiende la última columna de la tabla.

Sigue una gráfica con la representación de la función, y las tangentes trazadas desde los diferentes puntos (inicial y siguientes), junto a su intersección con el eje x, que produce la siguiente aproximación. Aparecen los diferentes puntos de la sucesión $\{x_n\}$ sobre el eje x con un pequeño círculo y los puntos correspondientes sobre la curva con un cuadrado, y ambas sucesiones de puntos se van aproximando progresivamente a la solución.

Sugerencia: asignar a cada uno de los puntos obtenidos sobre la curva el número de iteración que le corresponde, y seguir así gráficamente la convergencia del proceso.



Partiendo ahora de $x_0 = 2$, las iteraciones son:

NEWTON-RAPHSON						
k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	$\|e_k\| / \|x_k\|$	$\|e_k\|$	$\|e_k\| / \|e_{k-1}\|^2$
0	2.000000000000000	-0.800000000000000	-0.333333333333333	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
1	-0.400000000000000	3.200000000000000	-8.333333333333333	6.0000000000	2.4000000000	0.0000000000
2	-0.016000000000000	1.248780487804878	-3.098354154273250	24.0000000000	0.3840000000	0.0666666667
3	0.387046400000000	0.362869245037513	-1.559334457043047	1.0413387129	0.4030464000	2.7333333333
4	0.619754170548224	0.052132906677200	-1.143465434665512	0.3754839929	0.2327077705	1.4325203252
5	0.665346197291429	0.001427237699461	-1.081713364241836	0.0685237654	0.0455920267	0.8419128300
6	0.666665620483044	0.000001129879022	-1.080001355855251	0.0019791379	0.0013194232	0.6347552711
7	0.666666666666010	0.000000000000709	-1.080000000000851	0.0000015693	0.0000010462	0.6009514918
8	0.666666666666667	0.000000000000000	-1.080000000000000	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
9	0.666666666666667	0.000000000000000	-1.080000000000000	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000

La convergencia se produjo en la iteración: 8. La gráfica correspondiente es: