Raices

Question 1 Top 1 Bottom Focus Help

Obtener una raiz de la función $f(x) = \sin(x) + \cos(x) - 1.1$ en el intervalo [0,0.6] por el método de Newton-Raphson, tomando como aproximación inicial $x_0 = 0$. Entrar también la cuarta iteración resultante del proceso iterativo y dar los resultados con seis cifras decimales correctas.
You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} 0.106 & 0.106 \end{bmatrix}$$

Solution:
Dada x_n, la aproximación más reciente a un cero α de la función $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, se quiere obtener una nueva aproximación a esa raíz. Consideramos el punto de intersección con el eje x de la tangente a f en el punto $(x_n,f(x_n))$, tomando ese punto de intersección x_{n+1} como siguiente aproximación. El punto de intersección viene definido por: (ver apuntes de clase, donde se obtuvo analíticamente)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n=0,1,2,\ldots$$

Tiene orden de convergencia 2 (*cuadrática*) y constante de error asintótico

$$\frac{f''(\alpha)}{2\,f'(\alpha)}$$

Partiendo de $x_0=0$ para comenzar el proceso, obtenemos el valor de la primera iteración:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0 - \frac{-0.1}{1} = 0.1$$

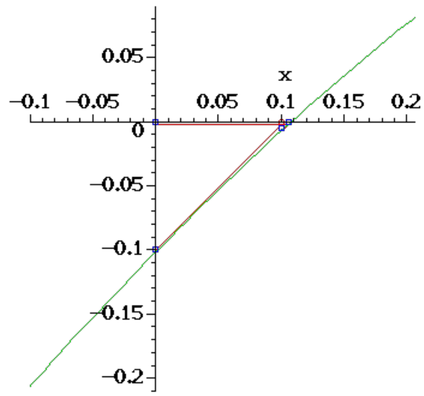
y las iteraciones que se obtienen son:

NEWTON-RAPHSON						
k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	$\lvert e_k \rvert / \lvert x_k \rvert$	$\lvert e_k \rvert$	$\lvert e_k \rvert / \lvert e_{k-1} \rvert^2$
0	0.000000000000000	-0.100000000000000	1.000000000000000	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
1	0.100000000000000	-0.005162418075146	0.895170748631198	1.0000000000	0.1000000000	0.0000000000
2	0.105766964663490	-0.000018234553918	0.888842008281630	0.0545251977	0.0057669647	0.5766964663
3	0.105787479618621	-0.000000000231472	0.888819442018028	0.0001939261	0.0000205150	0.6168449176
4	0.105787479879048	0.000000000000000	0.888819441731559	0.0000000025	0.0000000003	0.6187915067
5	0.105787479879048	0.000000000000000	0.888819441731559	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000

La convergencia se produjo en la iteración: 4. Como es $f'(x)=\cos(x) - \sin(x)$ y $f''(x)=-\sin(x) - \cos(x)$, siendo la aproximación a la raiz α = 0.10578747987904780686, la constante de error asintótico vale aproximadamente 0.61879834550931314775, que es el valor hacia el que tiende la última columna de la tabla.

Sigue una gráfica con la representación de la función, y las tangentes trazadas desde los diferentes puntos (inicial y siguientes), junto a su intersección con el eje x, que produce la siguiente aproximación. Aparecen los diferentes puntos de la sucesión $\{x_n\}$ sobre el eje x con un pequeño círculo y los puntos correspondientes sobre la curva con un cuadrado, y ambas sucesiones de puntos se van aproximando progresivamente a la solución.

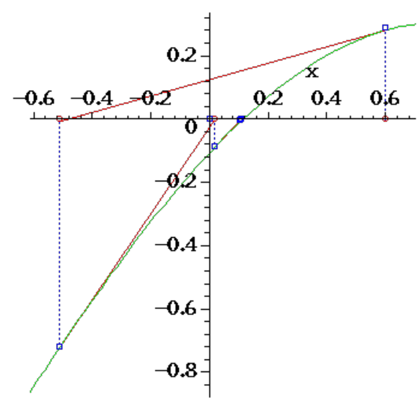
Sugerencia: asignar a cada uno de los puntos obtenidos sobre la curva el número de iteración que le corresponde, y seguir así gráficamente la convergencia del proceso.



Partiendo ahora de x_0 = .6, las iteraciones son:

NEWTON-RAPHSON						
k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	$\lvert e_k \rvert / \lvert x_k \rvert$	$\lvert e_k \rvert$	$\lvert e_k \rvert / \lvert e_{k-1} \rvert^2$
0	0.600000000000000	0.289978088304714	0.260693141514643	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
1	-0.512334933784308	-0.718611446845897	1.361815982988531	2.1711088986	1.1123349338	0.0000000000
2	0.015351226330284	-0.084767204368947	0.984531548847042	34.3742023446	0.5276861601	0.4264857750
3	0.101450249229261	-0.003865349185457	0.893582020456812	0.8486822216	0.0860990229	0.3092052186
4	0.105775928458438	-0.000010267200606	0.888832148234929	0.0408947413	0.0043256792	0.5835228478
5	0.105787479796480	-0.000000000073388	0.888819441822384	0.0001091938	0.0000115513	0.6173389387
6	0.105787479879048	0.000000000000000	0.888819441731559	0.0000000008	0.0000000001	0.0000000000
7	0.105787479879048	0.000000000000000	0.888819441731559	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000

La convergencia se produjo en la iteración: 6. La gráfica correspondiente es:



Mark summary:

Question	Value	Your mark