Raices

Question 1 Top 1 Bottom Focus Help

Obtener una raiz de la función $f(x) = e^{-3x} - 0.2$ en el intervalo [0,1] por el método de Newton-Raphson, tomando como aproximación inicial $x_0 = 0$. Entrar también la cuarta iteración resultante del proceso iterativo y dar los resultados con seis cifras decimales correctas.
You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} 0.536 & 0.536 \end{bmatrix}$$

Solution:

Dada x_n, la aproximación más reciente a un cero α de la función $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, se quiere obtener una nueva aproximación a esa raíz. Consideramos el punto de intersección con el eje x de la tangente a f en el punto $(x_n, f(x_n))$, tomando ese punto de intersección x_{n+1} como siguiente aproximación. El punto de intersección viene definido por: (ver apuntes de clase, donde se obtuvo analíticamente)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n=0,1,2,\ldots$$

Tiene orden de convergencia 2 (*cuadrática*) y constante de error asintótico

$$\frac{f''(\alpha)}{2\,f'(\alpha)}$$

Partiendo de $x_0=0$ para comenzar el proceso, obtenemos el valor de la primera iteración:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0 - \frac{0.8}{-3} = 0.2666666667$$

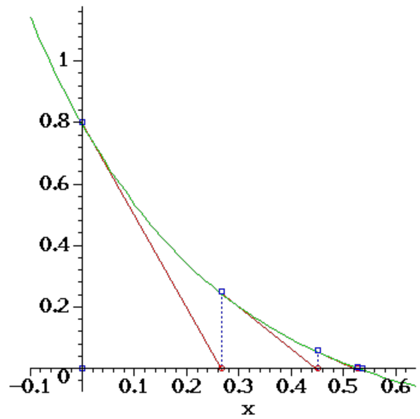
y las iteraciones que se obtienen son:

NEWTON-RAPHSON						
k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	$\lvert e_k \rvert / \lvert x_k \rvert$	$\lvert e_k \rvert$	$\lvert e_k \rvert / \lvert e_{k-1} \rvert^2$
0	0.000000000000000	0.800000000000000	-3.000000000000000	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
1	0.266666666666667	0.249328964117222	-1.347986892351665	1.0000000000	0.2666666667	0.0000000000
2	0.451630604767169	0.057975202169631	-0.773925606508894	0.4095469531	0.1849639381	2.6010553795
3	0.526541166818671	0.006052662335944	-0.618157987007831	0.1422691458	0.0749105621	2.1896208942
4	0.536332615709013	0.000088032430001	-0.600264097290002	0.0182562995	0.0097914489	1.7448610581
5	0.536479271873188	0.000000019362908	-0.600000058088724	0.0002733678	0.0001466562	1.5297004664
6	0.536479304144699	0.000000000000001	-0.600000000000003	0.0000000602	0.0000000323	1.5004400411
7	0.536479304144700	0.000000000000000	-0.600000000000000	0.0000000000	0.0000000000	1.5000234756
8	0.536479304144700	0.000000000000000	-0.600000000000000	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000

La convergencia se produjo en la iteración: 6. Como es $f'(x) = -3\,e^{-3x}$ y $f''(x) = 9\,e^{-3x}$, siendo la aproximación a la raiz α = 0.53647930414470012488, la constante de error asintótico vale aproximadamente 1.5, que es el valor hacia el que tiende la última columna de la tabla.

Sigue una gráfica con la representación de la función, y las tangentes trazadas desde los diferentes puntos (inicial y siguientes), junto a su intersección con el eje x, que produce la siguiente aproximación. Aparecen los diferentes puntos de la sucesión $\{x_n\}$ sobre el eje x con un pequeño círculo y los puntos correspondientes sobre la curva con un cuadrado, y ambas sucesiones de puntos se van aproximando progresivamente a la solución.

Sugerencia: asignar a cada uno de los puntos obtenidos sobre la curva el número de iteración que le corresponde, y seguir así gráficamente la convergencia del proceso.



Partiendo ahora de $x_0 = 1$, las iteraciones son:

NEWTON-RAPHSON						
k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	$\lvert e_k \rvert / \lvert x_k \rvert$	$\lvert e_k \rvert$	$\lvert e_k \rvert / \lvert e_{k-1} \rvert^2$
0	1.000000000000000	-0.150212931632136	-0.149361205103592	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
1	-0.005702461545845	0.817254553971793	-3.051763661915379	176.3628660116	1.0057024615	0.0000000000
2	0.262094997402487	0.255533967935489	-1.366601903806468	1.0217572315	0.2677974589	0.2647691771
3	0.449079932242499	0.059956804910674	-0.779870414732021	0.4163733924	0.1869849348	2.6073162642
4	0.525960403379843	0.006411978820139	-0.619235936460416	0.1461715951	0.0768804711	2.1988864416
5	0.536315065379581	0.000098567539994	-0.600295702619982	0.0193070504	0.0103546620	1.7518779841
6	0.536479263689787	0.000000024272950	-0.600000072818849	0.0003060665	0.0001641983	1.5314288673
7	0.536479304144698	0.000000000000001	-0.600000000000004	0.0000000754	0.0000000405	1.5004926859
8	0.536479304144700	0.000000000000000	-0.600000000000000	0.0000000000	0.0000000000	1.5000001643
9	0.536479304144700	0.000000000000000	-0.600000000000000	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000

La convergencia se produjo en la iteración: 7. La gráfica correspondiente es: