Interpolación y Aproximación

Question 1

Top 1 Bottom Focus Help

Dada la siguiente tabla de valores de la función $f(x) = (x^2+1)^{-1}$ tomados en el intervalo [0,5] , encontrar el spline cúbico natural s(x) que interpola en dichos valores, y obtener el valor por interpolación en x=2.9 con cuatro decimales exactos, indicando también los coeficientes del polinomio $q_2(x)$ usado para interpolar en el punto pedido.

x_k	0	1	2	3	4	5
y_k	1.000000	.500000	.200000	.100000	.58824e-1	.38462e-1

You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\left[\begin{array}{ccccc} 0.2 & -0.182 & 0.117 & -0.0350 & 0.105 \end{array}\right]$$

Solution:

Dados los n+1 puntos $(x_0,y_0), (x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)$, en los que las abscisas se suponen ordenadas, o sea:

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n$$

sabemos que para obtener el spline cúbico natural s(x) que interpola en dichos puntos, hemos de obtener n polinomios $q_k(x)$, $k=0,1,\ldots,n-1$ que constituyen el spline, de forma que en cada subintervalo actúa un polinomio diferente, o sea:

$$s(x) = q_k(x) \text{ , si } x \in [x_k,x_{k+1}], \quad k=0,1,\ldots,n-1$$

Cada $q_k(x)$ es un polinomio de grado 3 con la siguiente expresión:

$$q_k(x) = \frac{\sigma_k}{6}\left[\frac{(x_{k+1}-x)^3}{h_k} - h_k\,(x_{k+1}-x)\right] + \frac{\sigma_{k+1}}{6}\left[\frac{(x-x_k)^3}{h_k} - h_k\,(x-x_k)\right] + \frac{y_k}{h_k}(x_{k+1}-x) + \frac{y_{k+1}}{h_k}(x-x_k), \quad k=0,1,\ldots,n-1$$

donde los valores $h_k = x_{k+1}-x_k$ son las diferencias entre abscisas consecutivas y los σ_k son los coeficientes a determinar, que se obtienen como solución del sistema:

$$h_{k-1}\,\sigma_{k-1} + 2(h_{k-1} + h_k)\,\sigma_k + h_k\,\sigma_{k+1} = 6\,(\,f[x_k,x_{k+1}] - f[x_{k-1},x_k]\,) \quad k=1,2,\ldots,n-1$$

donde los $f[x_i,x_{i+1}]$ se corresponden con los valores de la primera columna de la tabla de diferencias divididas. Este sistema tiene n−1 ecuaciones y n+1 incógnitas por lo que tiene infinitas soluciones. Como vamos a calcular los splines cúbicos naturales, haremos $\sigma_0=0$ en la primera ecuación y $\sigma_n=0$ en la última, resultando el clásico sistema tridiagonal ya conocido (ver http://pcm.dis.ulpgc.es/an/tutor/splines.pdf)

Seguiremos el siguiente procedimiento:

1. Obtener los valores $h_k = x_{k+1}-x_k$ y las diferencias divididas $f[x_k,x_{k+1}]=(y_{k+1}-y_k)/h_k$, $k=0,1,\ldots,n-1$ resultando:

$$h_0 = 1 \Rightarrow f[x_0,x_1] = -.500000$$

$$h_1 = 1 \Rightarrow f[x_1,x_2] = -.300000$$

$$h_2 = 1 \Rightarrow f[x_2,x_3] = -.100000$$

$$h_3 = 1 \Rightarrow f[x_3,x_4] = -.41176e-1$$

$$h_4 = 1 \Rightarrow f[x_4,x_5] = -.20362e-1$$

2. Con estos valores, obtener la matriz de coeficientes y el vector de términos independientes: (poner $\sigma_0 = \sigma_n = 0$)

$$\begin{bmatrix} 4.000000 & 1.000000 & 0. & 0. \\ 1.000000 & 4.000000 & 1.000000 & 0. \\ 0. & 1.000000 & 4.000000 & 1.000000 \\ 0. & 0. & 1.000000 & 4.000000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.200000 \\ 1.200000 \\ .352941 \\ .124887 \end{bmatrix}$$

donde se ve claramente que es una matriz tridiagonal y simétrica. El sistema se puede resolver rápidamente por Gauss en dos pasos:

[i] hacer cero los elementos de la diagonal inferior,
[ii] ahora ya es triangular superior, y basta hacer una sustitución hacia atrás para obtener las soluciones.

3. Resolviendo entonces por Gauss, las soluciones σ_k que se obtienen son:

$$\sigma_1 = 0.24156401$$

$$\sigma_2 = 0.23374397$$

$$\sigma_3 = 0.02346013$$

$$\sigma_4 = 0.02535669$$

4. Sustituyendo los valores en la expresión del polinomio $q_k(x)$ ya vista anteriormente se obtienen los siguientes polinomios,

$$q_0(z) = 1+0.04026066812\,z^3-0.5402606681\,z$$

$$q_1(z) = 1.41564008-0.6649526942\ z+0.1246920261\ z^2-0.00130334059\ z^3$$

$$q_2(z) = 1.31151573-1.69880276\ z+0.3271558175\ z^2-0.03504730581\ z^3$$

$$q_3(z) = 0.3567039666-0.1150685132\ z+0.00888522953\ z^2+0.000316092848\ z^3$$

$$q_4(z) = 0.6474052414-0.3330944692\ z+0.06339171855\ z^2-0.00422611457\ z^3$$

El polinomio $q_k(x)$ también se puede expresar en función de las potencias de $(x-x_k)$ como: (Taylor)

$$q_k(x) = \beta_0 + \beta_1\ (x-x_k) + \beta_2\ (x-x_k)^2 + \beta_3\ (x-x_k)^3 = ((\beta_3\ (x-x_k) + \beta_2)\ (x-x_k) + \beta_1)\ (x-x_k) + \beta_0$$

donde en la última igualdad se ha utilizado el anidamiento de Ruffini-Horner, ya conocido. Esta última expresión permite evaluar el polinomio $q_k(x)$ en un punto concreto con sólo 4 sumas y 3 multiplicaciones.
Los coeficientes β_i se calculan para cada $q_k(x)$ como:

$$\beta_0 = y_k, \quad \beta_1 = f[x_k,x_{k+1}] - \frac{h_k}{6}\,(\sigma_{k+1} + 2\,\sigma_k), \quad \beta_2 = \frac{\sigma_k}{2}, \quad \beta_3 = \frac{\sigma_{k+1} - \sigma_k}{6\,h_k}$$

y obtenemos entonces

$$q_0(x) = 1.00000000 \quad -0.54026067\ (x - 0) \quad + 0.00000000\ (x - 0)^2 \quad + 0.04026067\ (x - 0)^3, \quad x \in [0, 1]$$

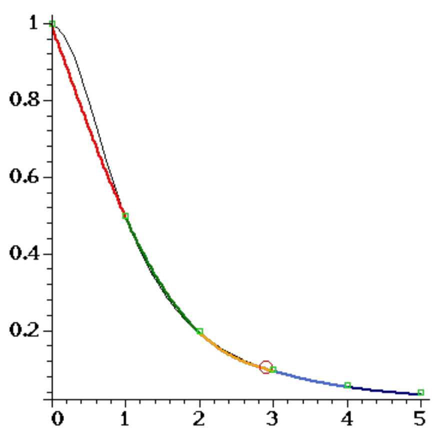
$$q_1(x) = 0.50000000 \quad -0.41947866\ (x - 1) \quad + 0.12078200\ (x - 1)^2 \quad -0.00130334\ (x - 1)^3, \quad x \in [1, 2]$$

$$q_2(x) = 0.20000000 \quad -0.18182468\ (x - 2) \quad + 0.11687198\ (x - 2)^2 \quad -0.03504731\ (x - 2)^3, \quad x \in [2, 3]$$

$$q_3(x) = 0.10000000 \quad -0.05322263\ (x - 3) \quad + 0.01173007\ (x - 3)^2 \quad + 0.00031609\ (x - 3)^3, \quad x \in [3, 4]$$

$$q_4(x) = 0.05882353 \quad -0.02881422\ (x - 4) \quad + 0.01267834\ (x - 4)^2 \quad -0.00422611\ (x - 4)^3, \quad x \in [4, 5]$$

que será la forma preferida de representación, por su facilidad de evaluación.
Como $2.9 \in [2,3]$, el polinomio a considerar es $q_2(x)$, que evaluado en x=2.9 nos da 0.10547461. En la siguiente gráfica aparece dibujada la gráfica de la función (en negro), la gráfica completa de todo el spline cúbico, donde cada polinomio $q_k(x)$ está dibujado con un color diferente, los puntos de interpolación y el punto donde se quiere interpolar.



El error real es la diferencia entre el valor de la función en el punto dado,o sea, f(2.9), y el valor que nos proporciona el spline $q_2(x)$, evaluado en x=2.9 que nos da 0.10547461.
El error real es por tanto:

$$\text{Error real} = |f(2.9) - p(2.9)| = |0.1062699256-0.10547461| = 0.0007953156$$

Mark summary:

Question	Value	Your mark
1	1.00	-
Total	1.00	0.00

New Version Click here to see a new version of this quiz.
New Quiz Click here to select a new quiz.

If you have technical problems, you can send email to the administrator.
Mathematical questions can be sent to the teacher.