Interpolación y Aproximación

Question 1

Top 1 Bottom Focus Help

Dada la siguiente tabla de valores de la función $f(x) = \cos(6 \pi x)$ tomados en el intervalo [1,3] , encontrar el spline cúbico natural s(x) que interpola en dichos valores, y obtener el valor por interpolación en x=1.9 con cuatro decimales exactos, indicando también los coeficientes del polinomio $q_2(x)$ usado para interpolar en el punto pedido.

x_k	1.4	1.6	1.8	2.2	2.6	2.8
y_k	.309016	.309017	-.809017	-.809016	.309018	-.809017

You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} -0.809 & -5.15 & 15.7 & -7.17 & -1.17 \end{bmatrix}$$

Solution:

Dados los n+1 puntos (x_0,y_0), (x_1,y_1),...,(x_n,y_n), en los que las abscisas se suponen ordenadas, o sea:

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n$$

sabemos que para obtener el spline cúbico natural s(x) que interpola en dichos puntos, hemos de obtener n polinomios $q_k(x)$, k=0,1,...,n−1 que constituyen el spline, de forma que en cada subintervalo actúa un polinomio diferente, o sea:

$$s(x) = q_k(x) \text{ , si } x \in [x_k,x_{k+1}], \quad k=0,1,\ldots,n-1$$

Cada $q_k(x)$ es un polinomio de grado 3 con la siguiente expresión:

$$q_k(x) = \frac{\sigma_k}{6}\left[\frac{(x_{k+1}-x)^3}{h_k} - h_k\,(x_{k+1}-x)\right] + \frac{\sigma_{k+1}}{6}\left[\frac{(x-x_k)^3}{h_k} - h_k\,(x-x_k)\right] + \frac{y_k}{h_k}(x_{k+1}-x) + \frac{y_{k+1}}{h_k}(x-x_k), \quad k=0,1,\ldots,n-1$$

donde los valores $h_k = x_{k+1}-x_k$ son las diferencias entre abscisas consecutivas y los σ_k son los coeficientes a determinar, que se obtienen como solución del sistema:

$$h_{k-1}\,\sigma_{k-1} + 2(h_{k-1} + h_k)\,\sigma_k + h_k\,\sigma_{k+1} = 6\,(\,f[x_k,x_{k+1}] - f[x_{k-1},x_k]\,) \quad k=1,2,\ldots,n-1$$

donde los $f[x_i,x_{i+1}]$ se corresponden con los valores de la primera columna de la tabla de diferencias divididas. Este sistema tiene n−1 ecuaciones y n+1 incógnitas por lo que tiene infinitas soluciones. Como vamos a calcular los splines cúbicos naturales, haremos $\sigma_0=0$ en la primera ecuación y $\sigma_n=0$ en la última, resultando el clásico sistema tridiagonal ya conocido (ver http://pcm.dis.ulpgc.es/an/tutor/splines.pdf)

Seguiremos el siguiente procedimiento:

1. Obtener los valores $h_k = x_{k+1}-x_k$ y las diferencias divididas $f[x_k,x_{k+1}]=(y_{k+1}-y_k)/h_k$, k=0,1,...,n−1 resultando:

$$h_0 = .2 \Rightarrow f[x_0,x_1] = .6e\text{-}5$$

$$h_1 = .2 \Rightarrow f[x_1,x_2] = -5.590173$$

$$h_2 = .4 \Rightarrow f[x_2,x_3] = .2e\text{-}5$$

$$h_3 = .4 \Rightarrow f[x_3,x_4] = 2.795085$$

$$h_4 = .2 \Rightarrow f[x_4,x_5] = -5.590174$$

2. Con estos valores, obtener la matriz de coeficientes y el vector de términos independientes: (poner $\sigma_0 = \sigma_n = 0$)

$$\begin{bmatrix} .800000 & .200000 & 0. & 0. \\ .200000 & 1.200000 & .400000 & 0. \\ 0. & .400000 & 1.600000 & .400000 \\ 0. & 0. & .400000 & 1.200000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -33.541076 \\ 33.541052 \\ 16.770498 \\ -50.311554 \end{bmatrix}$$

donde se ve claramente que es una matriz tridiagonal y simétrica. El sistema se puede resolver rápidamente por Gauss en dos pasos:

[i] hacer cero los elementos de la diagonal inferior,
[ii] ahora ya es triangular superior, y basta hacer una sustitución hacia atrás para obtener las soluciones.

3. Resolviendo entonces por Gauss, las soluciones σ_k que se obtienen son:

$$\sigma_1 = -49.79897494$$

$$\sigma_2 = 31.49052227$$

$$\sigma_3 = 14.28055053$$

$$\sigma_4 = -46.68647863$$

4. Sustituyendo los valores en la expresión del polinomio $q_k(x)$ ya vista anteriormente se obtienen los siguientes polinomios,

$$q_0(z) = 111.858712-41.49914578\,z^3+174.2964123\,z^2-242.3550055\,z$$

$$q_1(z) = -335.5899396+596.6112163\,z-350.574763\,z^2+67.74124768\,z^3$$

$$q_2(z) = 101.2972482-131.5340968\,z+54.46769758\,z^2-7.170821563\,z^3$$

$$q_3(z) = 295.4327262-396.2642941\,z+174.7996054\,z^2-25.40292882\,z^3$$

$$q_4(z) = -834.8504412+907.9085914\,z-326.8053505\,z^2+38.90539887\,z^3$$

El polinomio $q_k(x)$ también se puede expresar en función de las potencias de $(x-x_k)$ como: (Taylor)

$$q_k(x) = \beta_0 + \beta_1\,(x-x_k) + \beta_2\,(x-x_k)^2 + \beta_3\,(x-x_k)^3 = ((\beta_3\,(x-x_k) + \beta_2)\,(x-x_k) + \beta_1)\,(x-x_k) + \beta_0$$

donde en la última igualdad se ha utilizado el anidamiento de Ruffini-Horner, ya conocido. Esta última expresión permite evaluar el polinomio $q_k(x)$ en un punto concreto con sólo 4 sumas y 3 multiplicaciones.
Los coeficientes β_i se calculan para cada $q_k(x)$ como:

$$\beta_0 = y_k, \quad \beta_1 = f[x_k,x_{k+1}] - \frac{h_k}{6}\,(\sigma_{k+1} + 2\,\sigma_k), \quad \beta_2 = \frac{\sigma_k}{2}, \quad \beta_3 = \frac{\sigma_{k+1} - \sigma_k}{6\,h_k}$$

y obtenemos entonces

$$q_0(x) = 0.30901632 \; +1.65997168\,(x - 1.4) \; + 0.00000000\,(x - 1.4)^2 \; -41.49914578\,(x - 1.4)^3, \quad x \in [1.4, 1.6]$$

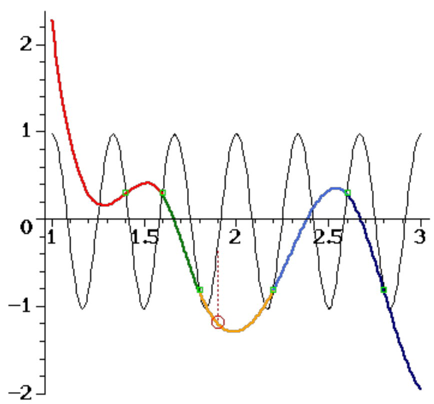
$$q_1(x) = 0.30901749 \; -3.31992581\,(x - 1.6) \; -24.89948747\,(x - 1.6)^2 \; + 67.74124767\,(x - 1.6)^3, \quad x \in [1.6, 1.8]$$

$$q_2(x) = -0.80901719 \; -5.15077108\,(x - 1.8) \; + 15.74526114\,(x - 1.8)^2 \; -7.17082156\,(x - 1.8)^3, \quad x \in [1.8, 2.2]$$

$$q_3(x) = -0.80901642 \; +4.00344348\,(x - 2.2) \; + 7.14027527\,(x - 2.2)^2 \; -25.40292882\,(x - 2.2)^3, \quad x \in [2.2, 2.6]$$

$$q_4(x) = 0.30901757 \; -2.47774214\,(x - 2.6) \; -23.34323932\,(x - 2.6)^2 \; + 38.90539887\,(x - 2.6)^3, \quad x \in [2.6, 2.8]$$

que será la forma preferida de representación, por su facilidad de evaluación.
Como $1.9 \in [1.8,2.2]$, el polinomio a considerar es $q_2(x)$, que evaluado en $x=1.9$ nos da -1.17381251. En la siguiente gráfica aparece dibujada la gráfica de la función (en negro), la gráfica completa de todo el spline cúbico, donde cada polinomio $q_k(x)$ está dibujado con un color diferente, los puntos de interpolación y el punto donde se quiere interpolar.



El error real es la diferencia entre el valor de la función en el punto dado,o sea, $f(1.9)$, y el valor que nos proporciona el spline $q_2(x)$, evaluado en $x=1.9$ que nos da -1.17381251.
El error real es por tanto:

$$\text{Error real} = |f(1.9) - p(1.9)| = |-0.3090169857+1.17381251| = 0.8647955243$$

Mark summary:

Question	Value	Your mark
1	1.00	-
Total	1.00	0.00

New Version Click here to see a new version of this quiz.
New Quiz Click here to select a new quiz.

If you have technical problems, you can send email to the administrator.
Mathematical questions can be sent to the teacher.