Interpolación y Aproximación

Question 1

Top 1 Bottom Focus Help

Dada la siguiente tabla de valores de la función $f(x) = 7^x$ tomados en el intervalo [1,2] , encontrar el spline cúbico natural s(x) que interpola en dichos valores, y obtener el valor por interpolación en x=1.8 con cuatro decimales exactos, indicando también los coeficientes del polinomio $q_3(x)$ usado para interpolar en el punto pedido.

x_k	1	5/4	3/2	7/4	2
y_k	7.000000	11.386036	18.520259	30.124620	49.000000

You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} 30.1 & 62.1 & 80.5 & -107.4 & 33.4 \end{bmatrix}$$

Solution:

Dados los n+1 puntos (x_0,y_0), (x_1,y_1),...,(x_n,y_n), en los que las abscisas se suponen ordenadas, o sea:

$$x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n$$

sabemos que para obtener el spline cúbico natural s(x) que interpola en dichos puntos, hemos de obtener n polinomios $q_k(x)$, k=0,1,...,n−1 que constituyen el spline, de forma que en cada subintervalo actúa un polinomio diferente, o sea:

$$s(x) = q_k(x) \text{ , si } x \in [x_k,x_{k+1}], \quad k=0,1,\dots,n-1$$

Cada $q_k(x)$ es un polinomio de grado 3 con la siguiente expresión:

$$q_k(x) = \frac{\sigma_k}{6}\left[\frac{(x_{k+1}-x)^3}{h_k} - h_k\,(x_{k+1}-x)\right] + \frac{\sigma_{k+1}}{6}\left[\frac{(x-x_k)^3}{h_k} - h_k\,(x-x_k)\right] + \frac{y_k}{h_k}(x_{k+1}-x) + \frac{y_{k+1}}{h_k}(x-x_k), \quad k=0,1,\dots,n-1$$

donde los valores $h_k = x_{k+1}-x_k$ son las diferencias entre abscisas consecutivas y los σ_k son los coeficientes a determinar, que se obtienen como solución del sistema:

$$h_{k-1}\,\sigma_{k-1} + 2(h_{k-1} + h_k)\,\sigma_k + h_k\,\sigma_{k+1} = 6\,(\,f[x_k,x_{k+1}] - f[x_{k-1},x_k]\,) \quad k=1,2,\dots,n-1$$

donde los $f[x_i,x_{i+1}]$ se corresponden con los valores de la primera columna de la tabla de diferencias divididas. Este sistema tiene n−1 ecuaciones y n+1 incógnitas por lo que tiene infinitas soluciones. Como vamos a calcular los splines cúbicos naturales, haremos $\sigma_0=0$ en la primera ecuación y $\sigma_n=0$ en la última, resultando el clásico sistema tridiagonal ya conocido (ver http://pcm.dis.ulpgc.es/an/tutor/splines.pdf)

Seguiremos el siguiente procedimiento:

1. Obtener los valores $h_k = x_{k+1}-x_k$ y las diferencias divididas $f[x_k,x_{k+1}]=(y_{k+1}-y_k)/h_k$, k=0,1,...,n−1 resultando:

$$h_0 = 1/4 \Rightarrow f[x_0,x_1] = 17.544144$$

$$h_1 = 1/4 \Rightarrow f[x_1,x_2] = 28.536892$$

$$h_2 = 1/4 \Rightarrow f[x_2,x_3] = 46.417444$$

$$h_3 = 1/4 \Rightarrow f[x_3,x_4] = 75.501520$$

2. Con estos valores, obtener la matriz de coeficientes y el vector de términos independientes: (poner $\sigma_0 = \sigma_n = 0$)

$$\begin{bmatrix} 1.000000 & .250000 & 0. \\ .250000 & 1.000000 & .250000 \\ 0. & .250000 & 1.000000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 65.956488 \\ 107.283312 \\ 174.504456 \end{bmatrix}$$

donde se ve claramente que es una matriz tridiagonal y simétrica. El sistema se puede resolver rápidamente por Gauss en dos pasos:

[i] hacer cero los elementos de la diagonal inferior,
[ii] ahora ya es triangular superior, y basta hacer una sustitución hacia atrás para obtener las soluciones.

3. Resolviendo entonces por Gauss, las soluciones σ_k que se obtienen son:

$$\sigma_1 = \quad 52.47989486$$

$$\sigma_2 = \quad 53.90637257$$

$$\sigma_3 = \quad 161.02786290$$

4. Sustituyendo los valores en la expresión del polinomio $q_k(x)$ ya vista anteriormente se obtienen los siguientes polinomios,

$$q_0(z) = -43.34407828+34.98659657\ z^3-104.9597897\ z^2+120.3172714\ z$$

$$q_1(z) = 23.13172524-39.22465707\ z+22.6737532\ z^2+0.95098515\ z^3$$

$$q_2(z) = -214.6820531+436.4028995\ z-294.4112847\ z^2+71.41432688\ z^3$$

$$q_3(z) = 743.3932402-1206.11889\ z+644.1114516\ z^2-107.3519086\ z^3$$

El polinomio $q_k(x)$ también se puede expresar en función de las potencias de $(x-x_k)$ como: (Taylor)

$$q_k(x) = \beta_0 + \beta_1\ (x-x_k) + \beta_2\ (x-x_k)^2 + \beta_3\ (x-x_k)^3 = ((\beta_3\ (x-x_k) + \beta_2)\ (x-x_k) + \beta_1)\ (x-x_k) + \beta_0$$

donde en la última igualdad se ha utilizado el anidamiento de Ruffini-Horner, ya conocido. Esta última expresión permite evaluar el polinomio $q_k(x)$ en un punto concreto con sólo 4 sumas y 3 multiplicaciones.
Los coeficientes β_i se calculan para cada $q_k(x)$ como:

$$\beta_0 = y_k, \quad \beta_1 = f[x_k,x_{k+1}] - \frac{h_k}{6}(\ \sigma_{k+1} + 2\ \sigma_k), \quad \beta_2 = \frac{\sigma_k}{2}, \quad \beta_3 = \frac{\sigma_{k+1} - \sigma_k}{6\ h_k}$$

y obtenemos entonces

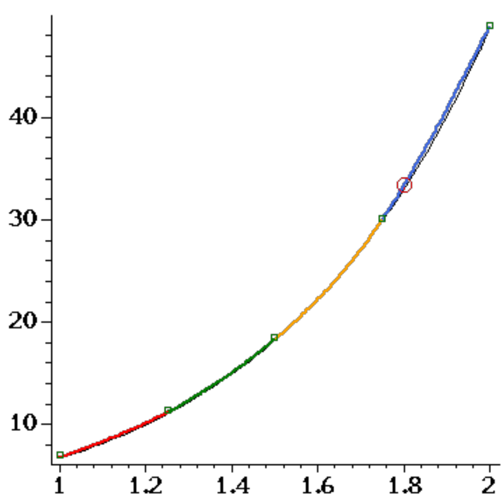
$$q_0(x) = 7.00000000 \quad +15.35748171\ (\ x - 1\ ) \quad + 0.00000000\ (\ x - 1\ )^2 \quad + 34.98659657\ (\ x - 1\ )^3, \quad x \in [\ 1\ ,\ 5/4\ ]$$

$$q_1(x) = 11.38603600 \quad +21.91746857\ (\ x - 5/4\ ) \quad + 26.23994743\ (\ x - 5/4\ )^2 \quad + 0.95098514\ (\ x - 5/4\ )^3, \quad x \in [\ 5/4\ ,\ 3/2\ ]$$

$$q_2(x) = 18.52025900 \quad +35.21575200\ (\ x - 3/2\ ) \quad + 26.95318628\ (\ x - 3/2\ )^2 \quad + 71.41432687\ (\ x - 3/2\ )^3, \quad x \in [\ 3/2\ ,\ 7/4\ ]$$

$$q_3(x) = 30.12462000 \quad +62.08253142\ (\ x - 7/4\ ) \quad + 80.51393145\ (\ x - 7/4\ )^2 \quad -107.35190860\ (\ x - 7/4\ )^3, \quad x \in [\ 7/4\ ,\ 2\ ]$$

que será la forma preferida de representación, por su facilidad de evaluación.
Como $1.8 \in [7/4,2]$, el polinomio a considerar es $q_3(x)$, que evaluado en x=1.8 nos da 33.41661241. En la siguiente gráfica aparece dibujada la gráfica de la función (en negro), la gráfica completa de todo el spline cúbico, donde cada polinomio $q_k(x)$ está dibujado con un color diferente, los puntos de interpolación y el punto donde se quiere interpolar.



El error real es la diferencia entre el valor de la función en el punto dado,o sea, f(1.8), y el valor que nos proporciona el spline $q_3(x)$, evaluado en x=1.8 que nos da 33.41661241.
El error real es por tanto:

$$\text{Error real} = |f(1.8) - p(1.8)| = |33.20293476-33.41661241| = 0.21367765$$