Interpolación y Aproximación

Question 1

Top 1 Bottom Focus Help

Dada la siguiente tabla de valores de la función $f(x) = \sin(3\pi x)$ tomados en el intervalo [1,4] , encontrar el spline cúbico natural s(x) que interpola en dichos valores, y obtener el valor por interpolación en x=1.3 con cuatro decimales exactos, indicando también los coeficientes del polinomio $q_0(x)$ usado para interpolar en el punto pedido.

x_k	1	7/4	5/2	13/4	4
y_k	0.	-.707107	-1.000000	-.707106	0.

You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} -0.000000139 & -1.4 & 0 & 0.181 & -0.309 \end{bmatrix}$$

Solution:

Dados los n+1 puntos (x_0,y_0), (x_1,y_1),...,(x_n,y_n), en los que las abscisas se suponen ordenadas, o sea:

$$x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n$$

sabemos que para obtener el spline cúbico natural s(x) que interpola en dichos puntos, hemos de obtener n polinomios $q_k(x)$, k=0,1,...,n−1 que constituyen el spline, de forma que en cada subintervalo actúa un polinomio diferente, o sea:

$$s(x) = q_k(x) \text{ , si } x \in [x_k,x_{k+1}], \quad k=0,1,\dots,n-1$$

Cada $q_k(x)$ es un polinomio de grado 3 con la siguiente expresión:

$$q_k(x) = \frac{\sigma_k}{6}\left[\frac{(x_{k+1}-x)^3}{h_k} - h_k\,(x_{k+1}-x)\right] + \frac{\sigma_{k+1}}{6}\left[\frac{(x-x_k)^3}{h_k} - h_k\,(x-x_k)\right] + \frac{y_k}{h_k}(x_{k+1}-x) + \frac{y_{k+1}}{h_k}(x-x_k), \quad k=0,1,\dots,n-1$$

donde los valores $h_k = x_{k+1}-x_k$ son las diferencias entre abscisas consecutivas y los σ_k son los coeficientes a determinar, que se obtienen como solución del sistema:

$$h_{k-1}\,\sigma_{k-1} + 2(h_{k-1} + h_k)\,\sigma_k + h_k\,\sigma_{k+1} = 6\,(\,f[x_k,x_{k+1}] - f[x_{k-1},x_k]\,) \quad k=1,2,\dots,n-1$$

donde los $f[x_i,x_{i+1}]$ se corresponden con los valores de la primera columna de la tabla de diferencias divididas. Este sistema tiene n−1 ecuaciones y n+1 incógnitas por lo que tiene infinitas soluciones. Como vamos a calcular los splines cúbicos naturales, haremos σ_0=0 en la primera ecuación y σ_n=0 en la última, resultando el clásico sistema tridiagonal ya conocido (ver http://pcm.dis.ulpgc.es/an/tutor/splines.pdf)

Seguiremos el siguiente procedimiento:

1. Obtener los valores $h_k = x_{k+1}-x_k$ y las diferencias divididas $f[x_k,x_{k+1}]=(y_{k+1}-y_k)/h_k$, k=0,1,...,n−1 resultando:

$$h_0 = 3/4 \Rightarrow f[x_0,x_1] = -.942809$$

$$h_1 = 3/4 \Rightarrow f[x_1,x_2] = -.390524$$

$$h_2 = 3/4 \Rightarrow f[x_2,x_3] = .390525$$

$$h_3 = 3/4 \Rightarrow f[x_3,x_4] = .942809$$

2. Con estos valores, obtener la matriz de coeficientes y el vector de términos independientes: (poner $\sigma_0 = \sigma_n = 0$)

$$\begin{bmatrix} 3.000000 & .750000 & 0. \\ .750000 & 3.000000 & .750000 \\ 0. & .750000 & 3.000000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.313714 \\ 4.686292 \\ 3.313703 \end{bmatrix}$$

donde se ve claramente que es una matriz tridiagonal y simétrica. El sistema se puede resolver rápidamente por Gauss en dos pasos:

[i] hacer cero los elementos de la diagonal inferior,
[ii] ahora ya es triangular superior, y basta hacer una sustitución hacia atrás para obtener las soluciones.

3. Resolviendo entonces por Gauss, las soluciones σ_k que se obtienen son:

$$\sigma_1 = 0.81605338$$

$$\sigma_2 = 1.15407151$$

$$\sigma_3 = 0.81604969$$

4. Sustituyendo los valores en la expresión del polinomio $q_k(x)$ ya vista anteriormente se obtienen los siguientes polinomios,

$$q_0(z) = 0.8634707252+0.1813451948\, z^3-0.5440355844\, z^2-0.5007804746\, z$$

$$q_1(z) = 1.432797416-1.476769087\, z+0.013672194\, z^2+0.0751151417\, z^3$$

$$q_2(z) = 3.780158408-4.293602277\, z+1.14040547\, z^2-0.0751159617\, z^3$$

$$q_3(z) = 7.426780654-7.659715117\, z+2.176132498\, z^2-0.1813443748\, z^3$$

El polinomio $q_k(x)$ también se puede expresar en función de las potencias de $(x-x_k)$ como: (Taylor)

$$q_k(x) = \beta_0 + \beta_1\,(x-x_k) + \beta_2\,(x-x_k)^2 + \beta_3\,(x-x_k)^3 = ((\beta_3\,(x-x_k) + \beta_2)\,(x-x_k) + \beta_1)\,(x-x_k) + \beta_0$$

donde en la última igualdad se ha utilizado el anidamiento de Ruffini-Horner, ya conocido. Esta última expresión permite evaluar el polinomio $q_k(x)$ en un punto concreto con sólo 4 sumas y 3 multiplicaciones.
Los coeficientes β_i se calculan para cada $q_k(x)$ como:

$$\beta_0 = y_k, \quad \beta_1 = f[x_k,x_{k+1}] - \frac{h_k}{6}(\sigma_{k+1} + 2\,\sigma_k), \quad \beta_2 = \frac{\sigma_k}{2}, \quad \beta_3 = \frac{\sigma_{k+1} - \sigma_k}{6\,h_k}$$

y obtenemos entonces

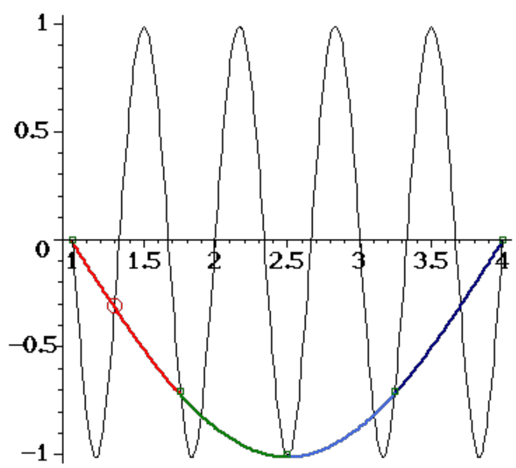
$$q_0(x) = -0.00000014 \quad -1.04481606\,(x-1) \quad +0.00000000\,(x-1)^2 \quad +0.18134519\,(x-1)^3, \quad x \in [1, 7/4]$$

$$q_1(x) = -0.70710718 \quad -0.73879604\,(x-7/4) \quad +0.40802669\,(x-7/4)^2 \quad +0.07511514\,(x-7/4)^3, \quad x \in [7/4, 5/2]$$

$$q_2(x) = -1.00000000 \quad +0.00000079\,(x-5/2) \quad +0.57703576\,(x-5/2)^2 \quad -0.07511596\,(x-5/2)^3, \quad x \in [5/2, 13/4]$$

$$q_3(x) = -0.70710634 \quad +0.73879624\,(x-13/4) \quad +0.40802484\,(x-13/4)^2 \quad -0.18134437\,(x-13/4)^3, \quad x \in [13/4, 4]$$

que será la forma preferida de representación, por su facilidad de evaluación.
Como $1.3 \in [1,7/4]$, el polinomio a considerar es $q_0(x)$, que evaluado en x=1.3 nos da -0.30854864. En la siguiente gráfica aparece dibujada la gráfica de la función (en negro), la gráfica completa de todo el spline cúbico, donde cada polinomio $q_k(x)$ está dibujado con un color diferente, los puntos de interpolación y el punto donde se quiere interpolar.



El error real es la diferencia entre el valor de la función en el punto dado,o sea, f(1.3), y el valor que nos proporciona el spline $q_0(x)$, evaluado en x=1.3 que nos da -0.30854864.
El error real es por tanto:

$$\text{Error real} = |f(1.3) - p(1.3)| = |-0.3090169934+0.30854864| = 0.0004683534$$