Interpolación y Aproximación

Question 1 Top 1 Bottom Focus Help

Hubo un error interno : invalid subscript selector

Dada la siguiente tabla de valores de la función $f(x) = x^{-2}$ tomados en el intervalo [1,5] , encontrar el spline cúbico natural s(x) que interpola en dichos valores, y obtener el valor por interpolación en x=4.7 con cuatro decimales exactos, indicando también los coeficientes del polinomio $q_2(x)$ usado para interpolar en el punto pedido.

x_k	1	7/3	11/3	5
y_k	1.000000	.183673	.74380e-1	.40000e-1

You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} 0.0744 & 0.0150 & -0.0458 & 0.0115 & 0.0535 \end{bmatrix}$$

Solution:

Dados los n+1 puntos (x_0,y_0), (x_1,y_1),...,(x_n,y_n), en los que las abscisas se suponen ordenadas, o sea:

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n$$

sabemos que para obtener el spline cúbico natural s(x) que interpola en dichos puntos, hemos de obtener n polinomios $q_k(x)$, $k=0,1,\ldots,n-1$ que constituyen el spline, de forma que en cada subintervalo actúa un polinomio diferente, o sea:

$$s(x) = q_k(x) \text{ , si } x \in [x_k,x_{k+1}], \quad k=0,1,\ldots,n-1$$

Cada $q_k(x)$ es un polinomio de grado 3 con la siguiente expresión:

$$q_k(x) = \frac{\sigma_k}{6}\left[\frac{(x_{k+1}-x)^3}{h_k} - h_k\,(x_{k+1}-x)\right] + \frac{\sigma_{k+1}}{6}\left[\frac{(x-x_k)^3}{h_k} - h_k\,(x-x_k)\right] + \frac{y_k}{h_k}(x_{k+1}-x) + \frac{y_{k+1}}{h_k}(x-x_k), \quad k=0,1,\ldots,n-1$$

donde los valores $h_k = x_{k+1}-x_k$ son las diferencias entre abscisas consecutivas y los σ_k son los coeficientes a determinar, que se obtienen como solución del sistema:

$$h_{k-1}\,\sigma_{k-1} + 2(h_{k-1} + h_k)\,\sigma_k + h_k\,\sigma_{k+1} = 6\,(\,f[x_k,x_{k+1}] - f[x_{k-1},x_k]\,) \quad k=1,2,\ldots,n-1$$

donde los $f[x_i,x_{i+1}]$ se corresponden con los valores de la primera columna de la tabla de diferencias divididas. Este sistema tiene n−1 ecuaciones y n+1 incógnitas por lo que tiene infinitas soluciones. Como vamos a calcular los splines cúbicos naturales, haremos $\sigma_0=0$ en la primera ecuación y $\sigma_n=0$ en la última, resultando el clásico sistema tridiagonal ya conocido (ver http://pcm.dis.ulpgc.es/an/tutor/splines.pdf)

Seguiremos el siguiente procedimiento:

1. Obtener los valores $h_k = x_{k+1}-x_k$ y las diferencias divididas $f[x_k,x_{k+1}]=(y_{k+1}-y_k)/h_k$, $k=0,1,\ldots,n-1$ resultando:

$$h_0 = 4/3 \Rightarrow f[x_0,x_1] = -.612245$$

$$h_1 = 4/3 \Rightarrow f[x_1,x_2] = -.81970e-1$$

$$h_2 = 4/3 \Rightarrow f[x_2,x_3] = -.25785e-1$$

2. Con estos valores, obtener la matriz de coeficientes y el vector de términos independientes: (poner $\sigma_0 = \sigma_n = 0$)

$$\begin{bmatrix} 5.333333 & 1.333333 \\ 1.333333 & 5.333333 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3.181650 \\ .337109 \end{bmatrix}$$

donde se ve claramente que es una matriz tridiagonal y simétrica[:-)]. El sistema se puede resolver rápidamente por Gauss en dos pasos:

[i] hacer cero los elementos de la diagonal inferior,
[ii] ahora ya es triangular superior, y basta hacer una sustitución hacia atrás para obtener las soluciones.

3. Resolviendo entonces por Gauss, las soluciones σ_k que se obtienen son:

$$\sigma_1 = \quad 0.61947445$$

$$\sigma_2 = -0.09166065$$

4. Sustituyendo los valores en la expresión del polinomio $q_k(x)$ ya vista anteriormente se obtienen los siguientes polinomios,

$$q_0(z) = 1.67247158+0.07743430573\, z^3-0.2323029172\, z^2-0.5176029683\, z$$

$$q_1(z) = 3.78543025-3.234264114\, z+0.9319804314\, z^2-0.08889188693\, z^3$$

$$q_2(z) = -1.161426865+0.813164433\, z-0.171863718\, z^2+0.0114575812\, z^3$$

El polinomio $q_k(x)$ también se puede expresar en función de las potencias de $(x-x_k)$ como: (Taylor)

$$q_k(x) = \beta_0 + \beta_1 (x-x_k) + \beta_2 (x-x_k)^2 + \beta_3 (x-x_k)^3 = ((\beta_3 (x-x_k) + \beta_2) (x-x_k) + \beta_1) (x-x_k) + \beta_0$$

donde en la última igualdad se ha utilizado el anidamiento de Ruffini-Horner, ya conocido. Esta última expresión permite evaluar el polinomio $q_k(x)$ en un punto concreto con sólo 4 sumas y 3 multiplicaciones.
Los coeficientes β_i se calculan para cada $q_k(x)$ como:

$$\beta_0 = y_k, \quad \beta_1 = f[x_k,x_{k+1}] - \frac{h_k}{6}(\sigma_{k+1} + 2\,\sigma_k), \quad \beta_2 = \frac{\sigma_k}{2}, \quad \beta_3 = \frac{\sigma_{k+1} - \sigma_k}{6\,h_k}$$

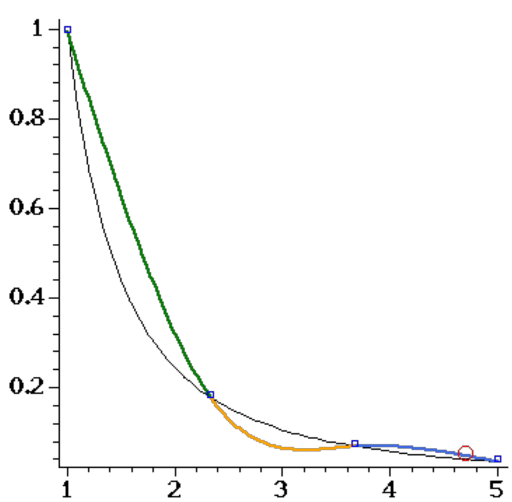
y obtenemos entonces

$$q_0(x) = 1.00000000 \quad -0.74990589\,(x - 1) \quad + 0.00000000\,(x - 1)^2 \quad + 0.07743431\,(x - 1)^3, \qquad x \in [1 , 7/3]$$

$$q_1(x) = 0.18367347 \quad -0.33692292\,(x - 7/3) \quad + 0.30973722\,(x - 7/3)^2 \quad -0.08889189\,(x - 7/3)^3, \qquad x \in [7/3 , 11/3]$$

$$q_2(x) = 0.07438017 \quad +0.01495294\,(x - 11/3) \quad -0.04583032\,(x - 11/3)^2 \quad + 0.01145758\,(x - 11/3)^3, \qquad x \in [11/3 , 5]$$

que será la forma preferida de representación, por su facilidad de evaluación.
Como $4.7 \in [11/3,5]$, el polinomio a considerar es $q_2(x)$, que evaluado en x=4.7 nos da 0.05353689. En la siguiente gráfica aparece dibujada la gráfica de la función (en negro), la gráfica completa de todo el spline cúbico, donde cada polinomio $q_k(x)$ está dibujado con un color diferente, los puntos de interpolación y el punto donde se quiere interpolar.



El error real es la diferencia entre el valor de la función en el punto dado,o sea, f(4.7), y el valor que nos proporciona el spline $q_2(x)$, evaluado en x=4.7 que nos da 0.05353689.
El error real es por tanto:

$$\text{Error real} = |f(4.7) - p(4.7)| = |0.04526935265-0.05353689| = 0.00826753735$$