

## Interpolación y Aproximación

### Question 1

[Top 1](#) [Bottom](#) [Focus](#) [Help](#)

Dada la siguiente tabla de valores de la función  $f(x) = \cos(4\pi x)$  tomados en el intervalo  $[0,1]$ , encontrar el spline cúbico natural  $s(x)$  que interpola en dichos valores, y obtener el valor por interpolación en  $x=0.6$  con cuatro decimales exactos, indicando también los coeficientes del polinomio  $q_1(x)$  usado para interpolar en el punto pedido.

$x_k$	.4	.5	.7	.8
$y_k$	.309017	1.000000	-.809017	-.809017

You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.204 & -106.7 & 312.5 & 0.225 \end{bmatrix}$$

### Solution:

Dados los  $n+1$  puntos  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ , en los que las abscisas se suponen ordenadas, o sea:

$$x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n$$

sabemos que para obtener el spline cúbico natural  $s(x)$  que interpola en dichos puntos, hemos de obtener  $n$  polinomios  $q_k(x)$ ,  $k=0,1,\dots,n-1$  que constituyen el spline, de forma que en cada subintervalo actúa un polinomio diferente, o sea:

$$s(x) = q_k(x), \text{ si } x \in [x_k, x_{k+1}], \quad k=0,1,\dots,n-1$$

Cada  $q_k(x)$  es un polinomio de grado 3 con la siguiente expresión:

$$q_k(x) = \frac{\sigma_k}{6} \left[ \frac{(x_{k+1}-x)^3}{h_k} - h_k(x_{k+1}-x) \right] + \frac{\sigma_{k+1}}{6} \left[ \frac{(x-x_k)^3}{h_k} - h_k(x-x_k) \right] + \frac{y_k}{h_k}(x_{k+1}-x) + \frac{y_{k+1}}{h_k}(x-x_k), \quad k=0,1,\dots,n-1$$

donde los valores  $h_k = x_{k+1} - x_k$  son las diferencias entre abscisas consecutivas y los  $\sigma_k$  son los coeficientes a determinar, que se obtienen como solución del sistema:

$$h_{k-1} \sigma_{k-1} + 2(h_{k-1} + h_k) \sigma_k + h_k \sigma_{k+1} = 6 (f[x_k, x_{k+1}] - f[x_{k-1}, x_k]) \quad k=1,2,\dots,n-1$$

donde los  $f[x_i, x_{i+1}]$  se corresponden con los valores de la primera columna de la tabla de diferencias divididas. Este sistema tiene  $n-1$  ecuaciones y  $n+1$  incógnitas por lo que tiene infinitas soluciones. Como vamos a calcular los splines cúbicos naturales, haremos  $\sigma_0=0$  en la primera ecuación y  $\sigma_n=0$  en la última, resultando el clásico sistema tridiagonal ya conocido (ver <http://pcm.dis.ulpgc.es/an/tutor/splines.pdf>)

Seguiremos el siguiente procedimiento:

1. Obtener los valores  $h_k = x_{k+1} - x_k$  y las diferencias divididas  $f[x_k, x_{k+1}] = (y_{k+1} - y_k)/h_k$ ,  $k=0,1,\dots,n-1$  resultando:

$$h_0 = .1 \Rightarrow f[x_0, x_1] = 6.909830$$

$$h_1 = .2 \Rightarrow f[x_1, x_2] = -9.045085$$

$$h_2 = .1 \Rightarrow f[x_2, x_3] = .4e-5$$

2. Con estos valores, obtener la matriz de coeficientes y el vector de términos independientes: (poner  $\sigma_0 = \sigma_n = 0$ )

$$\begin{bmatrix} .600000 & .200000 \\ .200000 & .600000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -95.729490 \\ 54.270536 \end{bmatrix}$$

donde se ve claramente que es una matriz tridiagonal y simétrica[;-]. El sistema se puede resolver rápidamente por Gauss en dos pasos:

[i] hacer cero los elementos de la diagonal inferior,

[ii] ahora ya es triangular superior, y basta hacer una sustitución hacia atrás para obtener las soluciones.

3. Resolviendo entonces por Gauss, las soluciones  $\sigma_k$  que se obtienen son:

$$\sigma_1 = -213.41187830$$

$$\sigma_2 = 161.58818630$$

4. Sustituyendo los valores en la expresión del polinomio  $q_k(x)$  ya vista anteriormente se obtienen los siguientes polinomios,

$$q_0(z) = 18.88627308 - 355.6864638 z^3 + 426.8237566 z^2 - 160.2628085 z$$

$$q_1(z) = -64.63704166 + 340.8770798 z - 575.45602 z^2 + 312.5000539 z^3$$

$$q_2(z) = 134.9250566 - 514.3890558 z + 646.3527451 z^2 - 269.3136438 z^3$$

El polinomio  $q_k(x)$  también se puede expresar en función de las potencias de  $(x-x_k)$  como: (Taylor)

$$q_k(x) = \beta_0 + \beta_1 (x-x_k) + \beta_2 (x-x_k)^2 + \beta_3 (x-x_k)^3 = ((\beta_3 (x-x_k) + \beta_2) (x-x_k) + \beta_1) (x-x_k) + \beta_0$$

donde en la última igualdad se ha utilizado el anidamiento de Ruffini-Horner, ya conocido. Esta última expresión permite evaluar el polinomio  $q_k(x)$  en un punto concreto con sólo 4 sumas y 3 multiplicaciones.

Los coeficientes  $\beta_i$  se calculan para cada  $q_k(x)$  como:

$$\beta_0 = y_k, \quad \beta_1 = f[x_k, x_{k+1}] - \frac{h_k}{6} (\sigma_{k+1} + 2 \sigma_k), \quad \beta_2 = \frac{\sigma_k}{2}, \quad \beta_3 = \frac{\sigma_{k+1} - \sigma_k}{6 h_k}$$

y obtenemos entonces

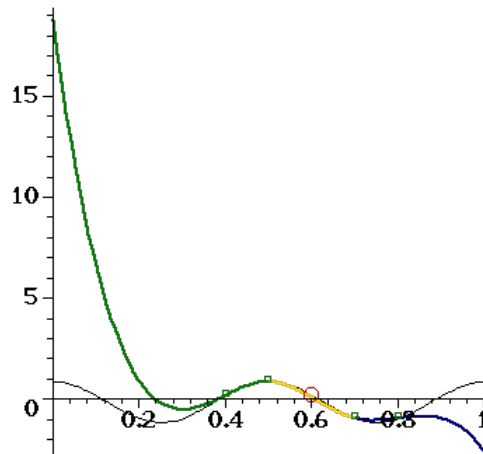
$$q_0(x) = 0.30901705 + 10.46669414 (x - .4) + 0.00000000 (x - .4)^2 - 355.68646380 (x - .4)^3, \quad x \in [.4, .5]$$

$$q_1(x) = 1.00000000 - 0.20389977 (x - .5) - 106.70593920 (x - .5)^2 + 312.50005380 (x - .5)^3, \quad x \in [.5, .7]$$

$$q_2(x) = -0.80901709 - 5.38626898 (x - .7) + 80.79409315 (x - .7)^2 - 269.31364380 (x - .7)^3, \quad x \in [.7, .8]$$

que será la forma preferida de representación, por su facilidad de evaluación.

Como  $0.6 \in [0.5, 0.7]$ , el polinomio a considerar es  $q_1(x)$ , que evaluado en  $x=0.6$  nos da  $0.22505069$ . En la siguiente gráfica aparece dibujada la gráfica de la función (en negro), la gráfica completa de todo el spline cúbico, donde cada polinomio  $q_k(x)$  está dibujado con un color diferente, los puntos de interpolación y el punto donde se quiere interpolar.



El error real es la diferencia entre el valor de la función en el punto dado, o sea,  $f(0.6)$ , y el valor que nos proporciona el spline  $q_1(x)$ , evaluado en  $x=0.6$  que nos da  $0.22505069$ .

El error real es por tanto:

$$\text{Error real} = |f(0.6) - p(0.6)| = |0.3090169931 - 0.22505069| = 0.0839663031$$



(cc) Jesús García Quesada 2010