Interpolación y Aproximación

Question 1 Top 1 Bottom Focus Help

Dada la siguiente tabla de valores de la función $f(x) = 1/5\ x^{-1}$ tomados en el intervalo [1,4] , encontrar el spline cúbico natural s(x) que interpola en dichos valores, y obtener el valor por interpolación en x=2.9 con cuatro decimales exactos, indicando también los coeficientes del polinomio $q_1(x)$ usado para interpolar en el punto pedido.

x_k	1	2	3	4
y_k	.200000	.100000	.66667e-1	.50000e-1

You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} 0.1 & -0.0667 & 0.0500 & -0.0167 & 0.0684 \end{bmatrix}$$

Solution:

Dados los n+1 puntos (x_0,y_0), (x_1,y_1),...,(x_n,y_n), en los que las abscisas se suponen ordenadas, o sea:

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n$$

sabemos que para obtener el spline cúbico natural s(x) que interpola en dichos puntos, hemos de obtener n polinomios $q_k(x)$, k=0,1,...,n−1 que constituyen el spline, de forma que en cada subintervalo actúa un polinomio diferente, o sea:

$$s(x) = q_k(x) \text{ , si } x \in [x_k,x_{k+1}], \quad k=0,1,\ldots,n-1$$

Cada $q_k(x)$ es un polinomio de grado 3 con la siguiente expresión:

$$q_k(x) = \frac{\sigma_k}{6}\left[\frac{(x_{k+1}-x)^3}{h_k} - h_k\,(x_{k+1}-x)\right] + \frac{\sigma_{k+1}}{6}\left[\frac{(x-x_k)^3}{h_k} - h_k\,(x-x_k)\right] + \frac{y_k}{h_k}(x_{k+1}-x) + \frac{y_{k+1}}{h_k}(x-x_k), \quad k=0,1,\ldots,n-1$$

donde los valores $h_k = x_{k+1}-x_k$ son las diferencias entre abscisas consecutivas y los σ_k son los coeficientes a determinar, que se obtienen como solución del sistema:

$$h_{k-1}\,\sigma_{k-1} + 2(h_{k-1} + h_k)\,\sigma_k + h_k\,\sigma_{k+1} = 6\,(\,f[x_k,x_{k+1}] - f[x_{k-1},x_k]\,) \quad k=1,2,\ldots,n-1$$

donde los $f[x_i,x_{i+1}]$ se corresponden con los valores de la primera columna de la tabla de diferencias divididas. Este sistema tiene n−1 ecuaciones y n+1 incógnitas por lo que tiene infinitas soluciones. Como vamos a calcular los splines cúbicos naturales, haremos $\sigma_0=0$ en la primera ecuación y $\sigma_n=0$ en la última, resultando el clásico sistema tridiagonal ya conocido (ver http://pcm.dis.ulpgc.es/an/tutor/splines.pdf)

Seguiremos el siguiente procedimiento:

1. Obtener los valores $h_k = x_{k+1}-x_k$ y las diferencias divididas $f[x_k,x_{k+1}]=(y_{k+1}-y_k)/h_k$, k=0,1,...,n−1 resultando:

$$h_0 = 1 \Rightarrow f[x_0,x_1] = -.100000$$

$$h_1 = 1 \Rightarrow f[x_1,x_2] = -.33333e\text{-}1$$

$$h_2 = 1 \Rightarrow f[x_2,x_3] = -.16667e\text{-}1$$

2. Con estos valores, obtener la matriz de coeficientes y el vector de términos independientes: (poner $\sigma_0 = \sigma_n = 0$)

$$\begin{bmatrix} 4.000000 & 1.000000 \\ 1.000000 & 4.000000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .400000 \\ .100000 \end{bmatrix}$$

donde se ve claramente que es una matriz tridiagonal y simétrica[:-)]. El sistema se puede resolver rápidamente por Gauss en dos pasos:

[i] hacer cero los elementos de la diagonal inferior,
[ii] ahora ya es triangular superior, y basta hacer una sustitución hacia atrás para obtener las soluciones.

3. Resolviendo entonces por Gauss, las soluciones σ_k que se obtienen son:

$$\sigma_1 = \quad 0.10000000$$

$$\sigma_2 = 0.00000000$$

4. Sustituyendo los valores en la expresión del polinomio $q_k(x)$ ya vista anteriormente se obtienen los siguientes polinomios,

$$q_0(z) = 0.3+0.0166666668\, z^3-0.0500000004\, z^2-0.0666666664\, z$$

$$q_1(z) = 0.5666666704-0.466666672\, z+0.1500000024\, z^2-0.016666667\, z^3$$

$$q_2(z) = 0.116666656-0.0166666576\, z-0.000000002400000006\, z^2+0.0000000002000000005\, z^3$$

El polinomio $q_k(x)$ también se puede expresar en función de las potencias de $(x-x_k)$ como: (Taylor)

$$q_k(x) = \beta_0 + \beta_1\,(x-x_k) + \beta_2\,(x-x_k)^2 + \beta_3\,(x-x_k)^3 = ((\beta_3\,(x-x_k) + \beta_2)\,(x-x_k) + \beta_1)\,(x-x_k) + \beta_0$$

donde en la última igualdad se ha utilizado el anidamiento de Ruffini-Horner, ya conocido. Esta última expresión permite evaluar el polinomio $q_k(x)$ en un punto concreto con sólo 4 sumas y 3 multiplicaciones.
Los coeficientes β_i se calculan para cada $q_k(x)$ como:

$$\beta_0 = y_k, \quad \beta_1 = f[x_k,x_{k+1}] - \frac{h_k}{6}(\sigma_{k+1} + 2\,\sigma_k), \quad \beta_2 = \frac{\sigma_k}{2}, \quad \beta_3 = \frac{\sigma_{k+1} - \sigma_k}{6\,h_k}$$

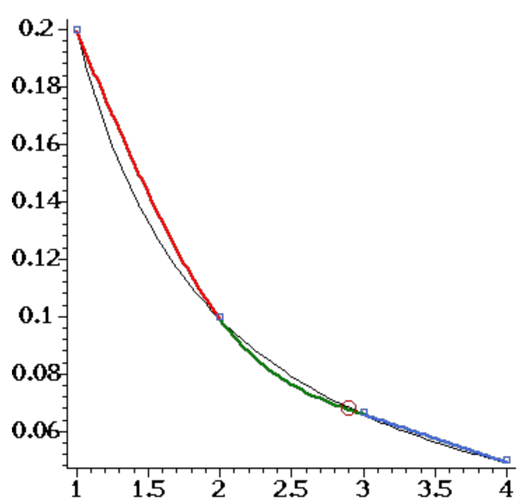
y obtenemos entonces

$$q_0(x) = 0.20000000 \; -0.11666667\,(x-1) \; + 0.00000000\,(x-1)^2 \; + 0.01666667\,(x-1)^3, \quad x \in [1,2]$$

$$q_1(x) = 0.10000000 \; -0.06666667\,(x-2) \; + 0.05000000\,(x-2)^2 \; -0.01666667\,(x-2)^3, \quad x \in [2,3]$$

$$q_2(x) = 0.06666667 \; -0.01666667\,(x-3) \; \; 0.00000000\,(x-3)^2 \; + 0.00000000\,(x-3)^3, \quad x \in [3,4]$$

que será la forma preferida de representación, por su facilidad de evaluación.
Como $2.9 \in [2,3]$, el polinomio a considerar es $q_1(x)$, que evaluado en x=2.9 nos da 0.06835. En la siguiente gráfica aparece dibujada la gráfica de la función (en negro), la gráfica completa de todo el spline cúbico, donde cada polinomio $q_k(x)$ está dibujado con un color diferente, los puntos de interpolación y el punto donde se quiere interpolar.



El error real es la diferencia entre el valor de la función en el punto dado,o sea, f(2.9), y el valor que nos proporciona el spline $q_1(x)$, evaluado en x=2.9 que nos da 0.06835.
El error real es por tanto:

$$\text{Error real} = |f(2.9) - p(2.9)| = |0.06896551724-0.06835| = 0.00061551724$$