Interpolación y Aproximación

Question 1

Top 1 Bottom Focus Help

Obtener el polinomio de interpolación usando la fórmula de Newton en diferencias progresivas/regresivas y utilizando la tabla de valores que sigue. Interpolar en el punto x = 9/4.

x_k	2	7/2	5
y_k	17	23	29

You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$9+4\,x$$

This can be entered as:

9+4*x

Solution:

Sabemos que si tenemos los n+1 puntos (x_i,y_i), i=0... n, en los cuales las abscisas son equidistantes (es h=3/2), y queremos calcular el polinomio que interpola en dichos puntos utilizando la fórmula de interpolación de Newton en diferencias finitas, hemos de usar: (ver http://pcm.dis.ulpgc.es/an/tutor/newtondf.pdf)

$$p_n(s) = \sum_{k=0}^{n} \binom{s}{k} \Delta^k y_0, \quad \text{donde } s=\frac{x-x_0}{h}$$

O también:

$$p_n(s)= y_0 + s\,\Delta y_0 + \binom{s}{2} \Delta^2 y_0 + \ldots + \binom{s}{n} \Delta^n y_0$$

en las que aparecen las diferencias progresivas $\Delta^k y_0$, obtenidas a partir de los valores en los puntos proporcionados por la tabla. Esta fórmula se usa cuando el punto en el que se quiere interpolar está próximo al punto inicial x_0 (recuérdese que $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ si $h > 0$ y al contrario si $h < 0$). Cuando se quiere interpolar cerca de x_n se usa la fórmula en diferencias regresivas:

$$p_n(u) = \sum_{k=0}^{n} \binom{u+k-1}{k} \nabla^k y_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{-u}{k} \nabla^k y_n, \quad \text{donde } u=\frac{x-x_n}{h}$$

O también:

$$p_n(u)= y_n + u\,\nabla y_n + \binom{u+1}{2} \nabla^2 y_n + \ldots + \binom{u+n-1}{n} \nabla^n y_n = y_n + (-1)\binom{-u}{1} \nabla y_n + (-1)^2 \binom{-u}{2} \nabla^2 y_n + \ldots + (-1)^n \binom{-u}{n} \nabla^n y_n$$

Primero calculamos la tabla de diferencias progresivas/regresivas/finitas:

x_k	y_k	Δ^1 / ∇^1	Δ^2 / ∇^2
2	17		
7/2	23	6	
5	29	6	0

La diagonal de la tabla de diferencias finitas está en color rojo, y sus valores representan las diferencias progresivas en y_0. En color azul, última línea horizontal, están las diferencias regresivas en y_n.

Fórmula progresiva

La diagonal es entonces: [17,6,0], que se corresponde exactamente con el conjunto de valores que aparece en la fórmula en diferencias finitas progresivas de y_0 y por tanto, los polinomios de Newton son los siguientes:

$p_0(s) = 17$ (interpola en el primer punto)

$p_1(s) = 6\,s + p_0(s) = 6\,s+17$ (interpola en todos los puntos)

O también,

$$p(s) = 17 + 6[s/1!] = 6\,s+17$$

en función de $s=[(x-x_0)/h] = 2/3\,x-4/3$. Si lo queremos en función de x, deshaciendo el cambio, tenemos:

$$p(x) = 9+4\,x = 9+4\,x$$

Fórmula regresiva

De forma análoga, la última línea horizontal de la tabla de diferencias finitas es [29,6,0], y sus valores se corresponden con las diferencias regresivas en y_n, que son los valores que aparecen en la fórmula en diferencias regresivas. En este caso, los polinomios de Newton son los siguientes:

$p_0(u) = 29$ (interpola en el último punto)

$p_1(u) = 6\,u + p_0(u) = 6\,u+29$ (interpola en todos los puntos)

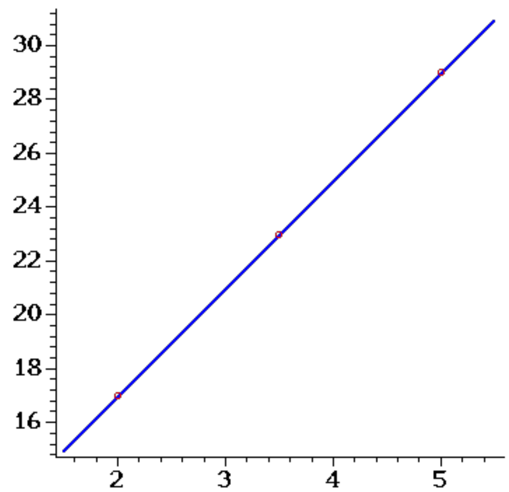
O también,

$$p(u) = 29 + 6[u/1!] = 6\,u+29$$

en función de $u=[(x-x_n)/h] = 2/3\,x-10/3$. Si lo queremos en función de x, deshaciendo el cambio, tenemos:

$$p(x) = 9+4\,x = 9+4\,x$$

Los polinomios obtenidos por la fórmula progresiva y la regresiva son idénticos, ya que se ha considerado la totalidad de los puntos de la tabla en ambos casos. Y lógicamente, también coincide con el polinomio que se obtendría si se utilizase la fórmula de Newton en diferencias divididas o Lagrange con esta tabla de datos. La gráfica de p(x) y de los puntos (x_i,y_i), i=0...2 es la que viene a continuación



Interpolación

Se trata de interpolar en el punto x = 9/4, que está próximo al primer valor de la tabla, por lo que utilizaremos la fórmula progresiva de Newton. Para x = 9/4 es $s = (x-x_0)/h = 1/6$ y sustituyendo este valor en alguna de las expresiones obtenidas para la fórmula progresiva (todas las fórmulas obtenidas permiten una reformulación tipo Ruffini-Horner, de forma que se puede minimizar el número de operaciones aritméticas a realizar) obtenemos

$$p(1/6) = 18$$

Si se quiere interpolar en puntos no cercanos a uno de los extremos de la tabla, p.e., en un valor cercano a uno de los del centro de la tabla, podemos tomar una subtabla (eliminando algunos elementos del comienzo o del final) de forma que uno de sus valores extremos sea próximo al punto donde se quiere interpolar.
Si se quieren utilizar todos los valores de la tabla, hay que recurrir a una fórmula de interpolación en diferencias centrales como Stirling, Bessel o Gauss.

Mark summary:

Question	Value	Your mark
1	2.00	-
Total	2.00	0.00

New Version Click here to see a new version of this quiz.