Interpolación y Aproximación

Question 1 Top 1 Bottom Focus Help

Obtener el polinomio de interpolación usando la fórmula de interpolación de Newton en diferencias divididas con los datos de la tabla que aparece a continuación, e interpolar en el punto x = 1.

x_k	3	−3	4	−7	2	6
y_k	−144	−180	−460	−5124	−30	−2394

You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$x^3-2x^4-3x$$

This can be entered as:

```
x^3-2*x^4-3*x
```

Solution:

Sabemos que si tenemos los n+1 puntos (x_i,y_i), i=0... n, y queremos calcular el polinomio que interpola en dichos puntos utilizando la fórmula de interpolación de Newton en diferencias divididas, hemos de usar: (ver p.e. el tutorial http://pcm.dis.ulpgc.es/an/tutor/newton.pdf,)

$$p_n(x) = f[x_0] + \sum_{i=1}^{n} f[x_0,x_1,\ldots,x_i] \prod_{j=0}^{i-1} (x-x_j)$$

O también:

$$p_n(x)= f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0)+ f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\ldots+f[x_0,x_1, \ldots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$$

en las que aparecen las diferencias divididas $f[x_0,\ldots,x_i]$, obtenidas a partir de los valores proporcionados por la tabla inicial. Calculamos entonces la tabla de diferencias divididas:

x_k	y_k	$f[x_k \mid\mid x_{k+1}]$	$f[x_k \mid\mid x_{k+2}]$	$f[x_k \mid\mid x_{k+3}]$	$f[x_k \mid\mid x_{k+4}]$	$f[x_k \mid\mid x_{k+5}]$
3	-144					
-3	-180	6				
4	-460	-40	-46			
-7	-5124	424	-116	7		
2	-30	566	-71	9	-2	
6	-2394	-591	-89	-9	-2	0

donde se ha expresado por brevedad la diferencia dividida $f[x_k,x_{k+1},\ldots,x_{k+p}]$ como $f[x_k \mid\mid x_{k+p}]$.La diagonal de la tabla de diferencias divididas, en color rojo, es entonces: $[-144,6,-46,7,-2,0]$, que se corresponde exactamente con el conjunto de valores que aparece en la fórmula y por tanto, los polinomios de Newton son los siguientes:

$p_0(x) = -144$ (interpola en el primer punto)

$p_1(x) = 6(x-3) + p_0(x) = 6x-162$ (interpola en los 2 primeros puntos)

$p_2(x) = -46(x-3)(x+3) + p_1(x) = -46x^2+252+6x$ (interpola en los 3 primeros puntos)

$p_3(x) = 7(x-3)(x+3)(x-4) + p_2(x) = 7x^3-74x^2-57x+504$ (interpola en los 4 primeros puntos)

$p_4(x) = -2(x-3)(x+3)(x-4)(x+7) + p_3(x) = x^3-2x^4-3x$ (interpola en todos los puntos)

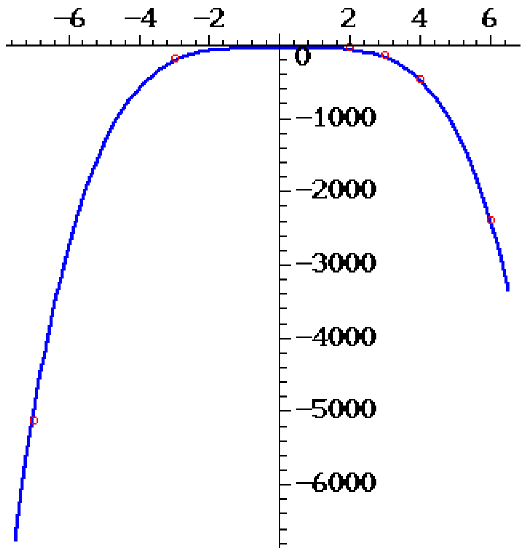
O también:

$$p(x) = -144 + 6(x-3) - 46(x-3)(x+3) + 7(x-3)(x+3)(x-4) - 2(x-3)(x+3)(x-4)(x+7) = x^3-2x^4-3x$$

La gráfica del polinomio de interpolación:

$$p(x) = x^3 - 2\,x^4 - 3\,x$$

y de los puntos (x_i,y_i), i=0...5 es la que viene a continuación



Si se quiere interpolar en un punto concreto, lo mejor es tomar el polinomio de interpolación en su forma de Newton y reordenarlo al estilo Ruffini-Horner expresando el polinomio como:

$$p(x) = -144 + (x-3)\,(6 + (x+3)\,(-46 + (x-4)\,(7 + (x+7)\,(-2))))$$

lo que supone realizar a lo sumo 8 sumas/restas y 4 multiplicaciones para interpolar en un punto x. Para interpolar entonces en x = 1, basta sustituir la x de la expresión reordenada anterior por su valor 1 para obtener $\mathbf{p(1) = -4}$.
Si se tuviera el polinomio en su forma normal, como combinación lineal de $\{1,x,x^2,\ldots,x^n\}$, deberíamos usar el algoritmo clásico de Ruffini-Horner, ya que supondría 4 sumas y 4 multiplicaciones, como se ve a continuación. En este caso, para obtener el valor en x = 1 del polinomio de interpolación $p(x) = x^3 - 2\,x^4 - 3\,x$ colocamos los coeficientes de mayor a menor exponente y operamos de la forma usual:

1	−2	1	0	−3	0
	−2	−1	−1	−4	**−4**

o bien

$$p(1) = (((-2 \,.\, 1 + 1) \,.\, 1 + 0) \,.\, 1 - 3) \,.\, 1 + 0 \;= -4$$

obteniendo el mismo resultado que antes, $p(1) = -4$, con el mismo número de multiplicaciones y la mitad de sumas/restas.

Mark summary:

Question	Value	Your mark
1	3.00	-
Total	3.00	0.00

New Version Click here to see a new version of this quiz.
New Quiz Click here to select a new quiz.