Interpolación y Aproximación

Question 1 Top 1 Bottom Focus Help

Obtener el polinomio de interpolación usando la fórmula de interpolación de Newton en diferencias divididas con los datos de la tabla que aparece a continuación, e interpolar en el punto $x = -4$.

x_k	3	1	−7	−1	6	5
y_k	−37	−7	−127	−1	−127	−91

You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$-1-3x^2-3x$$

This can be entered as:

-1-3*x^2-3*x

Solution:

Sabemos que si tenemos los n+1 puntos (x_i,y_i), i=0... n, y queremos calcular el polinomio que interpola en dichos puntos utilizando la fórmula de interpolación de Newton en diferencias divididas, hemos de usar: (ver p.e. el tutorial http://pcm.dis.ulpgc.es/an/tutor/newton.pdf,)

$$p_n(x) = f[x_0] + \sum_{i=1}^{n} f[x_0,x_1,\ldots,x_i] \prod_{j=0}^{i-1} (x-x_j)$$

O también:

$$p_n(x)= f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0)+ f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\ldots+f[x_0,x_1, \ldots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$$

en las que aparecen las diferencias divididas $f[x_0,\ldots,x_i]$, obtenidas a partir de los valores proporcionados por la tabla inicial. Calculamos entonces la tabla de diferencias divididas:

x_k	y_k	$f[x_k \mid\mid x_{k+1}]$	$f[x_k \mid\mid x_{k+2}]$	$f[x_k \mid\mid x_{k+3}]$	$f[x_k \mid\mid x_{k+4}]$	$f[x_k \mid\mid x_{k+5}]$
3	-37					
1	-7	-15				
-7	-127	15	-3			
-1	-1	21	-3	0		
6	-127	-18	-3	0	0	
5	-91	-36	-3	0	0	0

donde se ha expresado por brevedad la diferencia dividida $f[x_k,x_{k+1},\ldots,x_{k+p}]$ como $f[x_k \mid\mid x_{k+p}]$.La diagonal de la tabla de diferencias divididas, en color rojo, es entonces: $[-37,-15,-3,0,0,0]$, que se corresponde exactamente con el conjunto de valores que aparece en la fórmula y por tanto, los polinomios de Newton son los siguientes:

$p_0(x)$ = -37 (interpola en el primer punto)

$p_1(x)$ = -15 (x-3) + $p_0(x) = -15x+8$ (interpola en los 2 primeros puntos)

$p_2(x) = -3(x-3)(x-1) + p_1(x) = -1-3x^2-3x$ (interpola en todos los puntos)

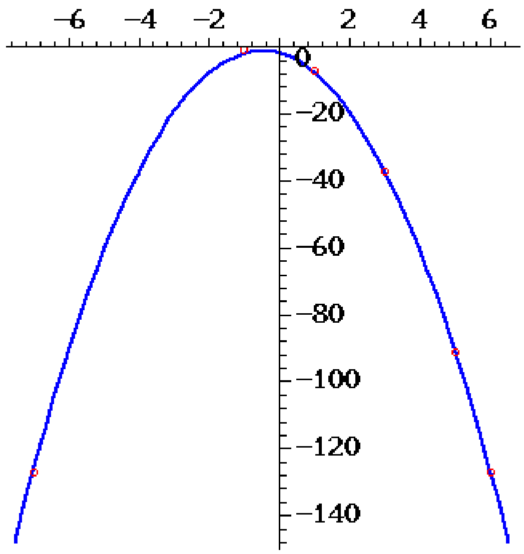
O también:

$$p(x) = -37 -15(x-3) -3(x-3)(x-1) = -1-3x^2-3x$$

La gráfica del polinomio de interpolación:

$$p(x) = -1-3\,x^2-3\,x$$

y de los puntos (x_i,y_i), i=0...5 es la que viene a continuación



Si se quiere interpolar en un punto concreto, lo mejor es tomar el polinomio de interpolación en su forma de Newton y reordenarlo al estilo Ruffini-Horner expresando el polinomio como:

$$p(x) = -37 + (x-3)\,(-15 + (x-1)\,(-3))$$

lo que supone realizar a lo sumo 4 sumas/restas y 2 multiplicaciones para interpolar en un punto x. Para interpolar entonces en x = −4, basta sustituir la x de la expresión reordenada anterior por su valor −4 para obtener **p(−4) = −37**.
Si se tuviera el polinomio en su forma normal, como combinación lineal de $\{1,x,x^2,\ldots,x^n\}$, deberíamos usar el algoritmo clásico de Ruffini-Horner, ya que supondría 2 sumas y 2 multiplicaciones, como se ve a continuación. En este caso, para obtener el valor en x = −4 del polinomio de interpolación $p(x) = -1-3\,x^2-3\,x$ colocamos los coeficientes de mayor a menor exponente y operamos de la forma usual:

−4	−3	−3	−1
	−3	9	**−37**

o bien

$$p(-4) = (-3\,.\,(-4)\,-3)\,.\,(-4)\,-1 \;=\; -37$$

obteniendo el mismo resultado que antes, p(−4) = −37, con el mismo número de multiplicaciones y la mitad de sumas/restas.

Mark summary:

Question	Value	Your mark
1	3.00	-
Total	3.00	0.00

New Version Click here to see a new version of this quiz.
New Quiz Click here to select a new quiz.

If you have technical problems, you can send email to the administrator.
Mathematical questions can be sent to the teacher.