Interpolación y Aproximación

Question 1

Top 1 Bottom Focus Help

Obtener el polinomio de interpolación usando la fórmula de interpolación de Newton en diferencias divididas con los datos de la tabla que aparece a continuación, e interpolar en el punto x = 5.

x_k	4	-4	-3	2	7
y_k	-372	-372	-148	-48	-2748

You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$-4-7\,x^2-x^4$$

This can be entered as:

-4-7*x^2-x^4

Solution:

Sabemos que si tenemos los n+1 puntos (x_i,y_i), i=0... n, y queremos calcular el polinomio que interpola en dichos puntos utilizando la fórmula de interpolación de Newton en diferencias divididas, hemos de usar: (ver p.e. el tutorial http://pcm.dis.ulpgc.es/an/tutor/newton.pdf,)

$$p_n(x) = f[x_0] + \sum_{i=1}^{n} f[x_0,x_1,\ldots,x_i] \prod_{j=0}^{i-1} (x-x_j)$$

O también:

$$p_n(x)= f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0)+ f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\ldots+f[x_0,x_1, \ldots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$$

en las que aparecen las diferencias divididas $f[x_0,\ldots,x_i]$, obtenidas a partir de los valores proporcionados por la tabla inicial. Calculamos entonces la tabla de diferencias divididas:

x_k	y_k	$f[x_k \,\|\|\, x_{k+1}]$	$f[x_k \,\|\|\, x_{k+2}]$	$f[x_k \,\|\|\, x_{k+3}]$	$f[x_k \,\|\|\, x_{k+4}]$
4	-372				
-4	-372	0			
-3	-148	224	-32		
2	-48	20	-34	1	
7	-2748	-540	-56	-2	-1

donde se ha expresado por brevedad la diferencia dividida $f[x_k,x_{k+1},\ldots,x_{k+p}]$ como $f[x_k \,\|\|\, x_{k+p}]$.La diagonal de la tabla de diferencias divididas, en color rojo, es entonces: $[-372,0,-32,1,-1]$, que se corresponde exactamente con el conjunto de valores que aparece en la fórmula y por tanto, los polinomios de Newton son los siguientes:

$p_0(x)$ = -372 (interpola en el primer punto)

$p_1(x) = 0\,(x-4) + p_0(x) = -372$ (interpola en los 2 primeros puntos)

$p_2(x) = -32\,(x-4)\,(x+4) + p_1(x) = -32\,x^2+140$ (interpola en los 3 primeros puntos)

$p_3(x) = (x-4)\,(x+4)\,(x+3) + p_2(x) = x^3-29\,x^2-16\,x+92$ (interpola en los 4 primeros puntos)

$p_4(x) = -\,(x-4)\,(x+4)\,(x+3)\,(x-2) + p_3(x) = -4-7\,x^2-x^4$ (interpola en todos los puntos)

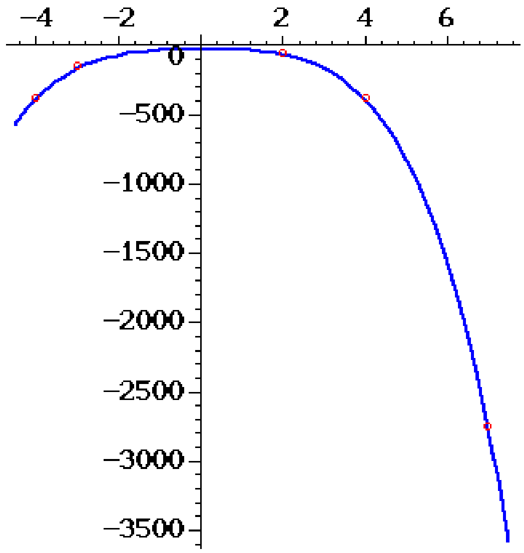
O también:

$$p(x) = -372 + 0\,(x-4) - 32\,(x-4)\,(x+4) + 1\,(x-4)\,(x+4)\,(x+3) - 1\,(x-4)\,(x+4)\,(x+3)\,(x-2) = -4-7\,x^2-x^4$$

La gráfica del polinomio de interpolación:

$$p(x) = -4-7x^2-x^4$$

y de los puntos (x_i,y_i), i=0...4 es la que viene a continuación



Si se quiere interpolar en un punto concreto, lo mejor es tomar el polinomio de interpolación en su forma de Newton y reordenarlo al estilo Ruffini-Horner expresando el polinomio como:

$$p(x) = -372 + (x-4)\,(0+(x+4)\,(-32+(x+3)\,(1+(x-2)\,(-1))))$$

lo que supone realizar a lo sumo 8 sumas/restas y 4 multiplicaciones para interpolar en un punto x. Para interpolar entonces en x = 5, basta sustituir la x de la expresión reordenada anterior por su valor 5 para obtener **p(5) = −804**.
Si se tuviera el polinomio en su forma normal, como combinación lineal de $\{1,x,x^2,\ldots,x^n\}$, deberíamos usar el algoritmo clásico de Ruffini-Horner, ya que supondría 4 sumas y 4 multiplicaciones, como se ve a continuación. En este caso, para obtener el valor en x = 5 del polinomio de interpolación $p(x) = -4-7x^2-x^4$ colocamos los coeficientes de mayor a menor exponente y operamos de la forma usual:

5	−1	0	−7	0	−4
	−1	−5	−32	−160	**−804**

o bien

$$p(5) = (((-1 \,.\, 5 + 0) \,.\, 5 - 7) \,.\, 5 + 0) \,.\, 5 - 4 = -804$$

obteniendo el mismo resultado que antes, p(5) = −804, con el mismo número de multiplicaciones y la mitad de sumas/restas.

Mark summary:

Question	Value	Your mark
1	3.00	-
Total	3.00	0.00

New Version Click here to see a new version of this quiz.
New Quiz Click here to select a new quiz.