Interpolación y Aproximación

Question 1 Top 1 Bottom Focus Help

Obtener el polinomio de interpolación usando la fórmula de interpolación de Newton en diferencias divididas con los datos de la tabla que aparece a continuación, e interpolar en el punto $x = 5$.

x_k	4	-4	7	6	2
y_k	278	-242	1430	908	40

You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$2+x+4\ x^3+x^2$$

This can be entered as:

2+x+4*x^3+x^2

Solution:

Sabemos que si tenemos los n+1 puntos (x_i,y_i), i=0... n, y queremos calcular el polinomio que interpola en dichos puntos utilizando la fórmula de interpolación de Newton en diferencias divididas, hemos de usar: (ver p.e. el tutorial http://pcm.dis.ulpgc.es/an/tutor/newton.pdf,)

$$p_n(x) = f[x_0] + \sum_{i=1}^{n} f[x_0,x_1,\ldots,x_i] \prod_{j=0}^{i-1} (x-x_j)$$

O también:

$$p_n(x)= f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0)+ f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\ldots+f[x_0,x_1, \ldots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$$

en las que aparecen las diferencias divididas $f[x_0,\ldots,x_i]$, obtenidas a partir de los valores proporcionados por la tabla inicial. Calculamos entonces la tabla de diferencias divididas:

x_k	y_k	$f[x_k \mid\mid x_{k+1}]$	$f[x_k \mid\mid x_{k+2}]$	$f[x_k \mid\mid x_{k+3}]$	$f[x_k \mid\mid x_{k+4}]$
4	278				
-4	-242	65			
7	1430	152	29		
6	908	522	37	4	
2	40	217	61	4	0

donde se ha expresado por brevedad la diferencia dividida $f[x_k,x_{k+1},\ldots,x_{k+p}]$ como $f[x_k \mid\mid x_{k+p}]$.La diagonal de la tabla de diferencias divididas, en color rojo, es entonces: [278,65,29,4,0], que se corresponde exactamente con el conjunto de valores que aparece en la fórmula y por tanto, los polinomios de Newton son los siguientes:

$p_0(x) = 278$ (interpola en el primer punto)

$p_1(x) = 65\ (x-4) + p_0(x) = 65\ x+18$ (interpola en los 2 primeros puntos)

$p_2(x) = 29\ (\ x-4\ )\ (\ x+4\ ) + p_1(x) = 29\ x^2-446+65\ x$ (interpola en los 3 primeros puntos)

$p_3(x) = 4\ (\ x-4\ )\ (\ x+4\ )\ (\ x-7\ ) + p_2(x) = 2+x+4\ x^3+x^2$ (interpola en todos los puntos)

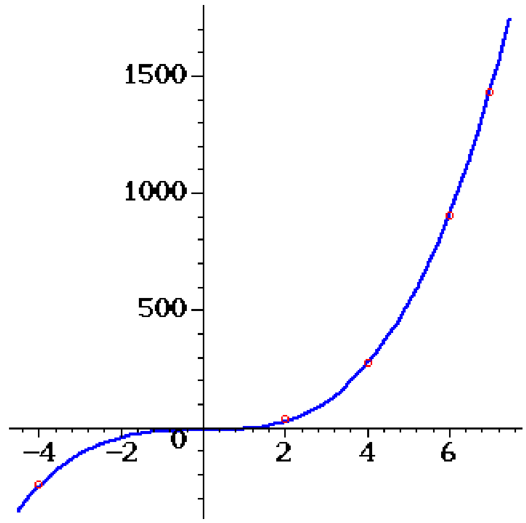
O también:

$$p(x) = 278 +65\ (x-4) +29\ (\ x-4\ )\ (\ x+4\ )\ \ +4\ (\ x-4\ )\ (\ x+4\ )\ (\ x-7\ ) \ \ = 2+x+4\ x^3+x^2$$

La gráfica del polinomio de interpolación:

$$p(x) = 2+x+4\ x^3+x^2$$

y de los puntos (x_i,y_i), $i=0...4$ es la que viene a continuación



Si se quiere interpolar en un punto concreto, lo mejor es tomar el polinomio de interpolación en su forma de Newton y reordenarlo al estilo Ruffini-Horner expresando el polinomio como:

$$p(x) = 278 +(x-4)\ (65+(x+4)\ (29+(x-7)\ (4)))$$

lo que supone realizar a lo sumo 6 sumas/restas y 3 multiplicaciones para interpolar en un punto x. Para interpolar entonces en x = 5, basta sustituir la x de la expresión reordenada anterior por su valor 5 para obtener **p(5) = 532**.
Si se tuviera el polinomio en su forma normal, como combinación lineal de $\{1,x,x^2,\ldots,x^n\}$, deberíamos usar el algoritmo clásico de Ruffini-Horner, ya que supondría 3 sumas y 3 multiplicaciones, como se ve a continuación. En este caso, para obtener el valor en x = 5 del polinomio de interpolación $p(x) = 2+x+4\ x^3+x^2$ colocamos los coeficientes de mayor a menor exponente y operamos de la forma usual:

5	4	1	1	2
	4	21	106	**532**

o bien

$$p(5) = ((4\ .\ 5\ +1)\ .\ 5\ +1)\ .\ 5\ +2\ \ = 532$$

obteniendo el mismo resultado que antes, p(5) = 532, con el mismo número de multiplicaciones y la mitad de sumas/restas.

Mark summary:

Question	Value	Your mark
1	3.00	-
Total	3.00	0.00

New Version Click here to see a new version of this quiz.
New Quiz Click here to select a new quiz.

If you have technical problems, you can send email to the administrator.
Mathematical questions can be sent to the teacher.