Interpolación y Aproximación

Question 1 Top 1 Bottom Focus Help

Obtener el polinomio de interpolación usando la fórmula de interpolación de Newton en diferencias divididas con los datos de la tabla que aparece a continuación, e interpolar en el punto $x = -1$.

x_k	6	−2	−4
y_k	48	0	8

You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$x^2+2\,x$$

This can be entered as:

x^2+2*x

Solution:

Sabemos que si tenemos los n+1 puntos (x_i,y_i), i=0... n, y queremos calcular el polinomio que interpola en dichos puntos utilizando la fórmula de interpolación de Newton en diferencias divididas, hemos de usar: (ver p.e. el tutorial http://pcm.dis.ulpgc.es/an/tutor/newton.pdf,)

$$p_n(x) = f[x_0] + \sum_{i=1}^{n} f[x_0,x_1,\ldots,x_i] \prod_{j=0}^{i-1} (x-x_j)$$

O también:

$$p_n(x)= f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0)+ f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\ldots+f[x_0,x_1, \ldots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$$

en las que aparecen las diferencias divididas $f[x_0,\ldots,x_i]$, obtenidas a partir de los valores proporcionados por la tabla inicial. Calculamos entonces la tabla de diferencias divididas:

x_k	y_k	$f[x_k \mid\mid x_{k+1}]$	$f[x_k \mid\mid x_{k+2}]$
6	48		
-2	0	6	
-4	8	-4	1

donde se ha expresado por brevedad la diferencia dividida $f[x_k,x_{k+1},\ldots,x_{k+p}]$ como $f[x_k \mid\mid x_{k+p}]$.La diagonal de la tabla de diferencias divididas, en color rojo, es entonces: [48,6,1], que se corresponde exactamente con el conjunto de valores que aparece en la fórmula y por tanto, los polinomios de Newton son los siguientes:

$p_0(x) = 48$ (interpola en el primer punto)

$p_1(x) = 6\,(x-6) + p_0(x) = 6\,x+12$ (interpola en los 2 primeros puntos)

$p_2(x) = (\,x-6\,)\,(\,x+2\,) + p_1(x) = x^2+2\,x$ (interpola en todos los puntos)

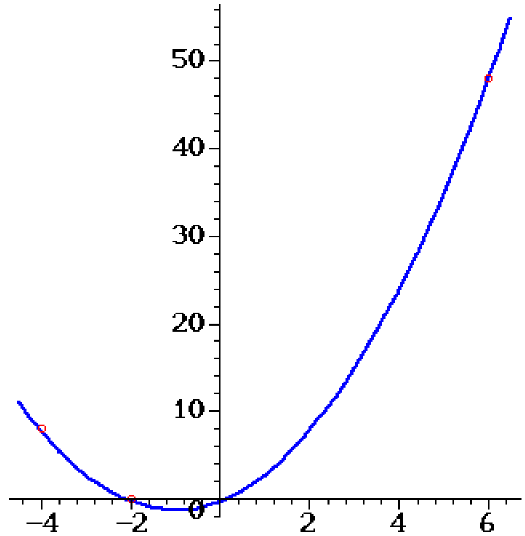
O también:

$$p(x) = 48 + 6\,(x-6) + 1\,(\,x-6\,)\,(\,x+2\,) \quad = x^2+2\,x$$

La gráfica del polinomio de interpolación:

$$p(x) = x^2+2\,x$$

y de los puntos (x_i,y_i), i=0...2 es la que viene a continuación



Si se quiere interpolar en un punto concreto, lo mejor es tomar el polinomio de interpolación en su forma de Newton y reordenarlo al estilo Ruffini-Horner expresando el polinomio como:

$$p(x) = 48 + (x-6)\,(6 + (x+2)\,(1))$$

lo que supone realizar a lo sumo 4 sumas/restas y 2 multiplicaciones para interpolar en un punto x. Para interpolar entonces en x = −1, basta sustituir la x de la expresión reordenada anterior por su valor −1 para obtener $\mathbf{p(-1) = -1}$.
Si se tuviera el polinomio en su forma normal, como combinación lineal de $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$, deberíamos usar el algoritmo clásico de Ruffini-Horner, ya que supondría 2 sumas y 2 multiplicaciones, como se ve a continuación. En este caso, para obtener el valor en x = −1 del polinomio de interpolación $p(x) = x^2 + 2\,x$ colocamos los coeficientes de mayor a menor exponente y operamos de la forma usual:

−1	1	2	0
	1	1	**−1**

o bien

$$p(-1) = (1\,.\,(-1) + 2)\,.\,(-1) + 0 \;=\; -1$$

obteniendo el mismo resultado que antes, p(−1) = −1, con el mismo número de multiplicaciones y la mitad de sumas/restas.

Mark summary:

Question	Value	Your mark
1	3.00	-
Total	3.00	0.00

New Version Click here to see a new version of this quiz.
New Quiz Click here to select a new quiz.

If you have technical problems, you can send email to the administrator.
Mathematical questions can be sent to the teacher.