Interpolación y Aproximación

Question 1 Top 1 Bottom Focus Help

Dada la nube de puntos (x_k,y_k) y sus pesos w_k dada por la siguiente tabla, encontrar la función del tipo $y = A \sin(2x) + B\,3^x + C\,x^{-1}$ que mejor se ajuste por mínimos cuadrados. Obtener asimismo la estimación para x=1.6. Calcular los resultados con cuatro decimales exactos.

w_k	1	1	1	1	1
x_k	1	7/4	5/2	13/4	4
y_k	6.3220623	14.637827	31.520448	70.588025	162.80635

You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} -0.161 & 2.1 & 0.547 & 12 \end{bmatrix}$$

Solution:

Sabemos que el elemento (i,j) de la matriz normal viene dado por:

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} w_k\ \phi_i(x_k)\,\phi_j(x_k), \qquad i,j=1,\ldots,m$$

siendo n el número de puntos, m el número de funciones que intervienen en el ajuste, ϕ_i la i-ésima función básica que interviene, y w_k el peso correspondiente al punto/observación (x_k,y_k), $k=1,\ldots,n$. La función que buscamos es del tipo: (véase http://pcm.dis.ulpgc.es/an/tutor/ajuste.pdf)

$$\Phi(x) = c_1\phi_1(x) + c_2\,\phi_2(x) + \ldots + c_m\,\phi_m(x)$$

donde hay que obtener el valor de los coeficientes c_i, $i=1,\ldots,m$. El sistema de ecuaciones normales es:

$$\begin{bmatrix} 2.89451280 & 73.16299494 & .63881049 \\ 73.16299494 & 8122.430411 & 44.32664724 \\ .63881049 & 44.32664724 & 1.64370517 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 146.6469081 \\ 16306.01155 \\ 89.71569388 \end{bmatrix}$$

Esta matriz es simétrica y definida positiva, por lo que se puede utilizar Cholesky para resolver el sistema. Las soluciones son:

A = -0.16149639

B = 2.00599590

C = 0.54741381

por lo que la función obtenida es por tanto:

$$\Phi(x) = -0.16149639 \sin(2x) + 2.59959\,3^x + 0.54741381\,x^{-1}$$

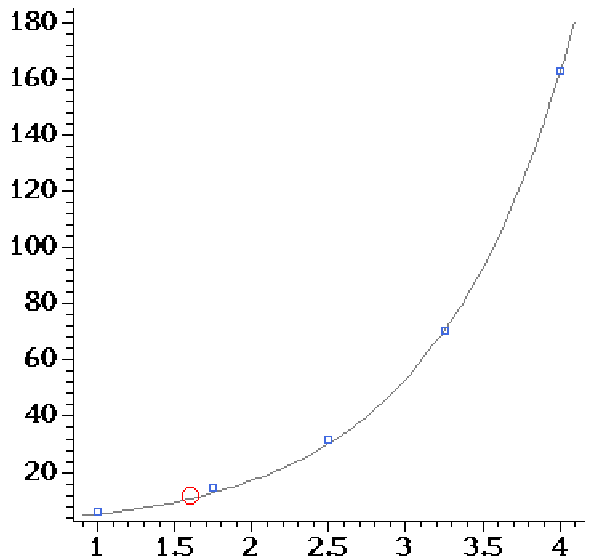
El valor de la función ajustada en el punto pedido es $\Phi(1.6) = 11.98542661$. Para calcular el error cuadrático, añadimos una nueva línea a la tabla inicial de datos, la de los valores de la función obtenida en las abscisas x_k de los datos, obteniendo:

w_k	1	1	1	1	1
x_k	1	7/4	5/2	13/4	4
y_k	6.3220623	14.637827	31.520448	70.588025	162.80635
$\Phi(x_k)$	6.41855326	14.08750354	31.64420970	71.41474892	162.4627436

Y por tanto, el error cuadrático es:

$$E = \left(\sum_{k=1}^{n} w_k \, (y_k - \Phi(x_k))^2 \right)^{1/2} = 1.6255408$$

La gráfica de la función ajustada, de los puntos que intervienen en el ajuste y del punto donde se quiere estimar la función son:



Mark summary:

Question	Value	Your mark
1	1.00	-
Total	1.00	0.00

New Version Click here to see a new version of this quiz.
New Quiz Click here to select a new quiz.

If you have technical problems, you can send email to the administrator.
Mathematical questions can be sent to the teacher.